UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

GABRIELA ARTINI DA SILVA
GUILHERME GASPARINI LOVATTO
LAURA MASSUDA CREMA
MARIANA THAIS GARCIA

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO Ii
PROMAT

CASCAVEL
2021

GABRIELA ARTINI DA SILVA
GUILHERME GASPARINI LOVATTO
LAURA MASSUDA CREMA
MARIANA THAIS GARCIA

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação.

Orientador: Prof. Amarildo de Vicente

CASCAVEL
2021

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao nosso professor orientador Amarildo de Vicente pela paciência, dedicação e pelos conselhos tão valiosos durante a realização do estágio. Agradecemos também à professora Andréia Büttner Ciani pelas orientações na elaboração da primeira versão deste trabalho.

Agradecemos aos nossos pais e demais familiares pelo apoio, incentivo e afeto. Vocês nos deram forças nos momentos de angústia. A todos os amigos e colegas com quem pudemos compartilhar nossa jornada, obrigado.

Por fim, agradecemos aos nossos alunos pela persistência, dedicação e participação no projeto. Citando Paulo Freire: “Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender”.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. Introdução

O presente relatório é fruto da prática docente desenvolvida na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática: Estágio Supervisionado II e busca apresentar brevemente as expectativas criadas, as dificuldades enfrentadas e os resultados alcançados durante nossa experiência como professores estagiários no segundo semestre do corrente ano.

A prática docente desenvolveu-se com a preparação e execução de aulas para o Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT), um curso de matemática oferecido a estudantes da rede pública de ensino, que beneficia moradores da comunidade em que a universidade está inserida. Por conta da pandemia do coronavírus, que até o presente momento tirou a vida de mais de 560 mil brasileiros, as tarefas descritas foram desenvolvidas de maneira remota e virtual, utilizando plataformas como o *Jitsi* e o *Google Meet*.

A primeira parte desse trabalho descreve brevemente o funcionamento do PROMAT através da apresentação dos conteúdos trabalhados e de uma breve análise teórica sobre alguns momentos de nossa atuação como docentes. Na sequência, são apresentados os planejamentos de cada aula executada, bem como breves relatos de cada prática, que apresentam os obstáculos enfrentados e as maneiras encontradas para superá-los. Ao final deste relato, são discutidos os resultados obtidos ao longo do projeto.

2. PROMAT

O Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT) é um projeto de ensino institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática, voltado para alunos da rede pública estadual de ensino, atendidos pelo Núcleo Regional de Educação de Cascavel. O PROMAT é um "curso preparatório de matemática" que aborda conteúdos da Educação Básica e tem por objetivo propiciar o entendimento de conteúdos matemáticos, promovendo o acesso e permanência de estudantes nas universidades públicas.

O projeto atende majoritariamente estudantes de Ensino Médio da rede pública de ensino, além de egressos do Ensino Médio, interessados em disputar vagas no Ensino Superior através de vestibulares e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Também participam do programa estudantes da Universidade, especificamente alunos do primeiro ano de graduação.

Por conta da pandemia de coronavírus, o curso teve duração excepcional de dezoito encontros, cada um com duas horas e meia de duração. As aulas ocorreram de modo remoto: as nove primeiras aulas foram ministradas por licenciandos matriculados na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado I, tratando de conteúdos de matemática referentes aos anos finais do Ensino Fundamental. As últimas nove aulas abordaram conteúdos referentes ao Ensino Médio, sendo conduzidas por discentes matriculados na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II.

As atividades desenvolvidas no projeto buscam ir além da exposição tradicional, utilizando metodologias diferenciadas e materiais elaborados pelos estagiários, utilizando das tecnologias disponíveis para estabelecer um vínculo entre o aluno e a matemática.

2.1. Opção Teórica e Metodológica

Ingresso a Cursos Superiores e os problemas relacionados

O ingresso a cursos superiores no Brasil se dá, em geral, através de provas como vestibulares ou do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Com isso, há a possibilidade de entrada em instituições públicas ou privadas em todo o país, levando escolas e cursos preparatórios a investirem seus esforços para que seus alunos atinjam seus objetivos, inclusive estando capacitados para resolver tais provas, que são conhecidas, especialmente o Enem, por serem extensas e com contexto interdisciplinar (FREITAS et al, 2013).

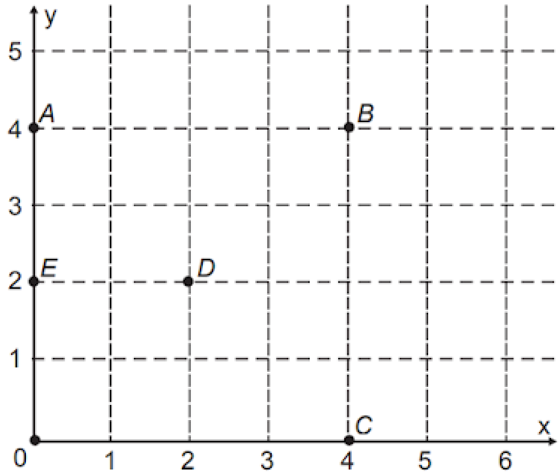
De acordo com a Assessoria de Comunicação Social do Inep, foram mais de 4 milhões de inscritos para o Enem 2021, entre a versão impressa e digital do exame que conta com perguntas objetivas de quatro áreas do conhecimento: Ciências Humanas e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias. Entretanto, nem sempre a prova foi constituída dessa forma. Criada em 1998 com o objetivo de avaliar o desempenho dos estudantes no Ensino Médio, continha 63 questões, aplicadas em um único dia, com o intuito de aprimorar as políticas educacionais. No ano de 2005, com a criação do ProUni (Programa Universidade para Todos), começou-se a conceder bolsas de estudos com base nas notas do Exame, e em 2009 diversas mudanças ocorreram, como o aumento no número de questões para 180, aplicadas em dois dias e a instauração do "Novo Enem", com questões contextualizadas, maiores e envolvendo conteúdos menos específicos e mais interdisciplinares, levando o aluno, como afirma Freitas et al. (2013), a exercitar sua interpretação textual e seu raciocínio.

Embora essas exigências sejam essenciais para o desenvolvimento do estudante como cidadão crítico, passa-se a esperar que a escola os capacite para isso. Uma estratégia para tal ação, está relacionada com a resolução de problemas. Os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN) trazem como habilidade, por meio da resolução de problemas, a capacidade de desenvolver estratégias, formular hipóteses e criticar uma determinada situação.

> *Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc). Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema. Formular hipóteses e prever resultados. Selecionar estratégias de resolução de problemas. Interpretar e criticar resultados numa situação concreta. (BRASIL, 2000, p. 46)*

Entender que a resolução de problemas não se limita apenas a sala de aula é fundamental, esta metodologia pode ser um complemento para a vida (SILVA; LOPES, 2018). Enxergar situações que, explicitamente, não tratam de matemática, mas ao analisar, questionar e ter uma postura matemática é possível matematizar por meio desta situação. Esta é a forma com que a maioria das questões do Enem são abordadas, trazem um enunciado contextualizando determinado assunto e em seus entrelaço há a matemática, na qual o aluno deve compreender e utilizar as diversas ferramentas que dispõe para resolver o problema. Para exemplificar, observemos a seguinte questão do Enem aplicado em 2018 (BLOG DO VESTIBULAR, 2018).

Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros" seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A(0;4), B(4;4), C(4;0), D(2;2) e E (0;2).



Passando pelo ponto A, qual equação forneceria a maior pontuação?

Ao resolver esta questão, pode-se utilizar de diversos assuntos matemáticos, a saber: teorema de Pitágoras, equação da reta, equação geral da circunferência, além dos cálculos aritméticos para realizar os procedimentos na resolução. O Enem é comumente conhecido por ser uma prova extensa, com questões de enunciados grandes que trazem a contextualização do assunto tratado e como podemos ver na questão anterior, vários assuntos matemáticos são trabalhados em uma mesma questão.

A mobilização diversos instrumentos matemáticos para a resolução de apenas um problema não ocorrem apenas no Enem, os vestibulares também trazem em sua essência questões com ênfase na interação entre os conteúdos. Por exemplo, no vestibular de 2017 da Universidade Federal do Paraná (UFPR), continha a seguinte questão (ESTUDA.COM, 2017).

Um dado comum, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado duas vezes, fornecendo dois números a e c, que podem ser iguais ou diferentes. Qual é a probabilidade de a equação $ax^2 + 4x + c = 0$ *ter pelo menos uma raiz real?*

Para resolvê-la é necessário conhecer os sinais das raízes de uma equação do segundo grau, ou seja, qual a condição para que uma raiz seja positiva, bem como o conhecimento de probabilidade.

> *Dentro dessa realidade, cabe a preocupação, já que os problemas estão presentes em toda a vida acadêmica e profissional do estudante. Presentes em avaliações como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), provas de concursos e vestibulares em geral, seleções de emprego entre outras, a resolução de problemas faz parte das competências exigidas e quem tem as ferramentas necessárias para interpretá-los está um passo à frente (SILVA; LOPES, 2018, p. 2).*

Como visto, os problemas estão presentes em diversos aspectos da vida e trazer a resolução de problemas, como metodologia, para sala de aula o aluno ter a oportunidade de trabalhar com variadas competências: "intuição, criatividade, autonomia, experimentação, método de tentativa e erro, liberdade de pensamento, criação de estratégias e validação das mesmas, conexão entre os saberes já aprendidos" (SILVA; LOPES, 2018, p. 2).

O que diz a legislação?

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca que o Ensino Médio deve aprofundar e consolidar as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, com o objetivo de construir "uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos" (BRASIL, 2017, p. 528). Conforme destacam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o estudo de probabilidade e estatística revela-se essencial para alcançarmos tal objetivo, considerando que a "análise de dados tem sido essencial em problemas sociais e econômicos, como nas estatísticas relacionadas a saúde, populações, transportes, orçamentos e questões de mercado" (BRASIL, 2002, p. 126).

O ensino de probabilidade deve tratar de procedimentos distintos que permitam o aluno quantificar e interpretar conjuntos de dados, que podem ser numéricos ou informações qualitativas, aplicando a Matemática ao contexto em que está inserido. Apropriando-se de conceitos como incerteza e experimento aleatório, o estudante deve ser capaz de realizar

> *a leitura das informações que circulam na mídia e em outras áreas do conhecimento na forma de tabelas, gráficos e informações de caráter estatístico. Contudo, espera-se do aluno nessa fase da escolaridade que ultrapasse a leitura de informações e reflita mais criticamente sobre seus significados. Assim, o tema proposto deve ir além da simples descrição e*

> *representação de dados, atingindo a investigação sobre esses dados e a tomada de decisões. (BRASIL, 2002, p. 126)*

Assim, ao trabalhar com probabilidade, espera-se que o aluno desenvolva as habilidades esperadas listadas na BNCC, dentre as quais destacamos

> *Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.*
> *[...] Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.*
> *[...] Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades. (BRASIL, 2017, p. 546)*

Experiência no Estágio

Como parte do estágio obrigatório da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II, atuamos como docentes no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT), um projeto de ensino institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática. O PROMAT é um "curso preparatório de matemática" que aborda conteúdos da Educação Básica e tem por objetivo propiciar o entendimento de conteúdos matemáticos, promovendo o acesso e permanência de estudantes da rede pública estadual de ensino nas universidades públicas.

Com o interesse de atender estudantes que prestarão vestibular e participarão do ENEM, o PROMAT estabelece uma organização curricular dividida em dois semestres, tratando de assuntos vistos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Dentre estes assuntos, destacamos o módulo que trata de Análise Combinatória e Probabilidade. Na elaboração das aulas que tratariam destes tópicos, buscamos trabalhar com a resolução de questões que foram retiradas de provas dos exames já mencionados, focando nossa busca em provas aplicadas nos últimos cinco anos – ou seja, a partir de 2016.

Análise de Provas da Unioeste

No período em que realizamos a busca pelas questões de vestibulares e ENEM, dedicamos nossos esforços à análise das provas do vestibular da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), por tratar-se da principal universidade pública de nossa região, da qual somos alunos. Analisando estas provas, observamos uma forte semelhança no estilo das provas realizadas nos últimos cinco anos, nos vestibulares de 2016/2017 a 2020/2021.

Todas as provas analisadas apresentavam um determinado padrão: ao menos uma questão tratava de funções, uma questão tratava de probabilidade, pelo menos uma questão falava de geometria plana ou espacial. Também identificamos questões tratando de polinômios e pelo menos uma envolvendo equações – seja ao tratar de geometria analítica (equação da reta, da circunferência) ou ao considerar sistemas lineares e álgebra matricial. Dentre essas questões, há uma tendência de encontrarmos problemas envolvendo trigonometria e progressões (geométrica ou aritmética).

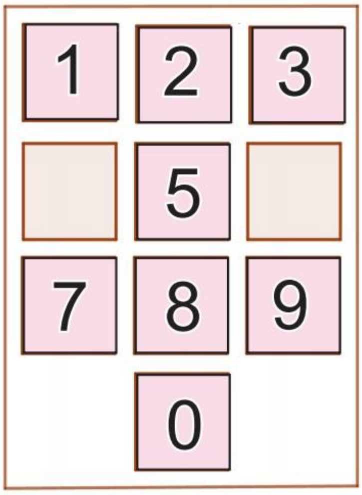
Apesar destes conteúdos estarem previstos no conteúdo programático do edital, esta identificação e catalogação feita pelos docentes (nós, estagiários), torna-se um facilitador para o aluno que está se preparando para esse vestibular, considerando que o estudante poderá focar em tais conteúdos em busca de aumentar sua possibilidade de acertos. Tal observação pode ser feita considerando que atualmente, com a visão de docentes, pudemos realizar diversos apontamentos que nos eram imperceptíveis no período em que éramos os estudantes que realizariam tais provas.

Entretanto, devemos comentar que esse padrão não é uma “regra”, uma vez que não se pode garantir que as provas seguintes contemplarão os mesmos conteúdos. Ao identificar esse padrão e realizar algumas “previsões”, não estamos influenciando diretamente na aprendizagem de Matemática, mas buscando reduzir uma desigualdade que identificamos entre os estudantes de rede pública que estudam de forma independente e os alunos que podem pagar um cursinho preparatório, auxiliando o estudante na busca e motivação dos seus estudos.

Cabe esclarecer que também que nenhum dos participantes do projeto, os estagiários ou nossos orientadores faz parte, atualmente, da comissão responsável pela elaboração do vestibular e ou tem acesso prévio às questões propostas. O que temos foi o acesso público a questões dos vestibulares já ocorridos.

No nosso caso, ficamos atentos aos conteúdos de probabilidade, abordados por nós na execução do PROMAT. No anexo temos um quadro com a catalogação das questões de probabilidade identificadas.

<table>
<tr><th>Questão</th><th>Vestibular em que foi proposta</th></tr>
<tr><td>
A tabela a seguir apresenta o número de casos notificados ou prováveis de dengue, chikungunya e Zika vírus, registrados nos estados do Sul do Brasil até a semana 23 do ano de 2016, conforme boletim epidemiológico do Ministério da Saúde.
<table>
<tr><th>Estado</th><th>Dengue</th><th>Zika</th><th>Chikungunya</th></tr>
<tr><td>Paraná</td><td>71114</td><td>1935</td><td>1459</td></tr>
<tr><td>Santa Catarina</td><td>5344</td><td>360</td><td>324</td></tr>
<tr><td>Rio Grande do Sul</td><td>3961</td><td>97</td><td>233</td></tr>
</table>
Escolheu-se aleatoriamente um paciente do Sul do Brasil registrado como um caso (notificado ou provável) de uma dessas doenças. Com relação ao paciente supracitado, de acordo com a tabela acima,
assinale a afirmação que é INCORRETA.
A. A probabilidade de ser um caso de chikungunya ou de ter sido no Paraná é maior que 90%.
B. A probabilidade de que seja um caso do Rio Grande do Sul é menor que a probabilidade de ser um caso de dengue.
C. A probabilidade de que não seja do Paraná é menor que 15%.
D. A probabilidade de ser um caso de Zika ou de ter sido em Santa Catarina é menor que 10%.
E. A probabilidade de ser um caso no Paraná ou ser de dengue é maior de que 98%.
</td><td>2017</td></tr>
<tr><td>
Escolhe-se, ao acaso, um número inteiro entre 101 e 150 inclusive. A probabilidade de o número escolhido ser um quadrado perfeito ou divisível por 4 é:
A. $\frac{12}{50}$
B. $\frac{13}{50}$
C. $\frac{15}{50}$
D. Menor do que 24%
E. Maior do que 28%
</td><td>2018</td></tr>
<tr><td>
Uma empresa possui 10 diretores, dos quais, 3 são suspeitos de corrupção. Foi resolvido se fazer uma investigação composta por uma comissão de 5 diretores da empresa. A única condição imposta é que a comissão de investigação selecionada tenha a maioria de diretores não suspeitos. Selecionada, ao acaso, uma comissão para apuração das suspeitas formada por diretores desta empresa, é CORRETO afirmar que a probabilidade de que esta comissão atenda à condição imposta está no intervalo:
A. (0,01; 0,50)
B. (0,50; 0,70)
C. (0,70; 0,80)
D. (0,80; 0,90)
E. (0,90; 0,99)
</td><td>2019</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>O alarme da casa de José é acionado por um teclado numérico composto pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Após digitar várias vezes a mesma senha de três algarismos, a qual é 064, a tinta das teclas que correspondem aos algarismos 4 e 6 apagou-se. Suponha que uma pessoa que não conheça a senha veja que os algarismos dessas teclas estão apagados e deduza que os números 4 e 6 devem compor a senha. Levando esta informação em consideração e que esta pessoa sabe que a senha tem três algarismos, mas não sabe que são, necessariamente, distintos, a chance dessa pessoa acertar a senha CORRETA em uma única tentativa é:
A. 1 em 1000.
B. 1 em 60.
C. 1 em 56.
D. 1 em 54.
E. 1 em 37.</td>
<td>2020</td>
</tr>
</table>

Referências

BATISTA, Rafael. **Enem 20 anos**: a transformação da maior prova do brasil. a transformação da maior prova do Brasil. 2018. Disponível em: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/enem-20-anos-transformacao-maior-prova-brasil.htm. Acesso em: 24 ago. 2021.

BLOG DO VESTIBULAR (ed.). **Questão do Enem 2018 aborda jogo pedagógico**. 2018. Disponível em: https://www.blogdovestibular.com/questoes/enem-2018-jogo-pedagogico.html. Acesso em: 20 ago. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 22 ago. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEB, 2002.

ESTUDA.COM (ed.). **Questões**. 2017. Disponível em: <https://www.estudavest.com.br/questoes/?id=141033>. Acesso em: 20 ago. 2021.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Divulgados os números de inscritos no Enem 2021 por UF.** 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/enem/divulgados-os-numeros-de-inscritos-no-enem-2021-por-uf>. Acesso em: 18 ago. 21.

FREITAS, Sunny Karelly S. de *et al*. Dificuldade dos alunos de Ensino Médio na resolução das questões do Enem. In: CONGRESSO NORTE NORDESTE DE PESQUISA E INOVAÇÃO, 7., 2012, Tocantins. **Anais [...].** Tocantins: IFTO, 2013.

PROVAS E GABARITOS. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 19 ago. 2021.

SILVA, Anderson Rodrigo Oliveira da; LOPES, Francinette Mendes. **A resolução de problemas como ferramenta metodológica para a solução de questões de Enem e vestibulares: um relato de experiência**. 2018. Disponível em: http://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/45142. Acesso em: 20 ago. 2021.

UNIOESTE, Universidade Estadual do Oeste do Paraná. **Vestibulares Anteriores**. Disponível em: <https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores/>. Acesso em 19 ago. 2021.

2.2. Cronograma

Encontro	Data	Conteúdos
1	29/05	Trigonometria no triângulo retângulo
2	12/06	Circunferência trigonométrica
3	19/06	Funções trigonométricas
4	26/06	Distância, ponto médio e pontos colineares
5	03/07	Equação da reta, posições relativas
6	10/07	Equação da circunferência, posições relativas
7	17/07	Princípio fundamental da contagem e permutação
8	24/07	Arranjo e combinação
9	31/07	Probabilidade

2.3. Módulo 1 – Trigonometria

2.3.1. Plano de aula do dia 29/05/2021

PROMAT – 1º Encontro

Público-Alvo:

Estudantes do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE Cascavel, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2h30.

Conteúdo:

Trigonometria no triângulo retângulo: seno, cosseno, tangente.

Objetivo Geral:

Espera-se que ao final deste módulo o aluno possa:

- Identificar razões trigonométricas no triângulo retângulo;
- Calcular a medida de um arco de circunferência;
- Calcular o seno, cosseno e tangente de um arco;
- Identificas as funções trigonométricas e suas representações gráficas.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com trigonometria no triângulo retângulo, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo em um triângulo retângulo;
- Calcular os valores aproximados do seno, cosseno e tangente de um ângulo;
- Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.

Recursos Didáticos:

Celular ou computador, lista de exercícios, caderno e lápis ou caneta.

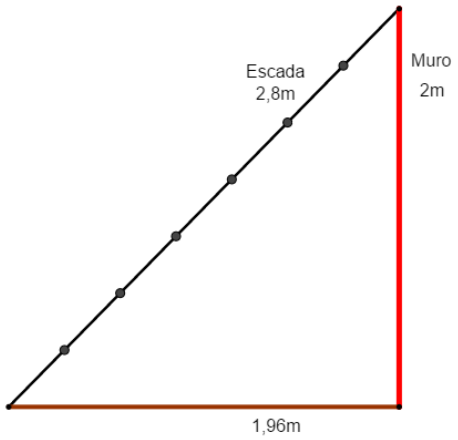
Encaminhamento metodológico:

Dinâmica de apresentação (10 minutos)

No início da aula, nos apresentaremos aos estudantes e explicaremos a eles a dinâmica do projeto. Na sequência, pediremos que se apresentem, mencionando seu nome, idade e cidade em que residem. Para isso, utilizaremos o site *Nearpod*.

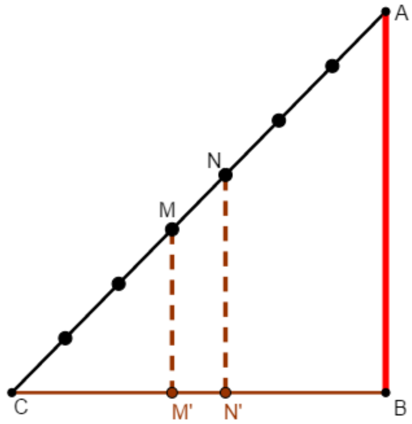
Atividade 1: Razões trigonométricas no triângulo retângulo (15 minutos)

Uma escada com seis degraus equidistantes tem 2,80 m de comprimento e está apoiada em um muro com 2 m de altura. A distância da base da escada à base do muro é de aproximadamente 1,96 m. Ao meio-dia, com o sol a pino, um pedreiro sobe a escada, degrau por degrau. Conforme ele sobe, a sombra de seu pé também muda de posição.



A que altura do chão o pedreiro está quando alcança o terceiro degrau? Qual é a distância entre a sombra do pé desse pedreiro e a base da escada quando ele está no quarto degrau?

Solução: Primeiramente, vamos construir segmentos auxiliares que nos ajudam a representar as situações mencionadas no enunciado. Veja que traçamos segmentos perpendiculares ao solo passando pelos pontos que marcam os degraus e que esses segmentos são paralelos ao segmento que representa o muro.



Na primeira situação, para determinar a altura do pedreiro calculamos o comprimento x do segmento MM'. Para isso, utilizaremos a semelhança de triângulos e o fato de que os degraus distam 0,4 m um do outro. Veja que temos a seguinte razão:

$$\frac{MM'}{CM} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x}{1{,}2} = \frac{2}{2{,}8}$$

Manipulando essa expressão, determinamos que $x \approx 0{,}857$ m.

Para a segunda situação, determinemos o comprimento y do segmento CN'. Novamente utilizaremos a razão de semelhança.

$$\frac{CN'}{CN} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{y}{1{,}6} = \frac{1{,}96}{2{,}8}$$

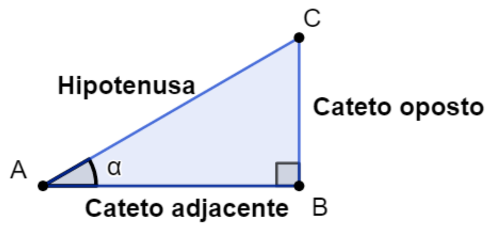
Operando essa igualdade, determinamos que $y = 1{,}12$ m.

Agora, notemos que temos duas razões constantes: considerando o ângulo $\angle ACB$, obtivemos a razão $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$ na primeira situação e a razão $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$ no segundo caso. Veja que esses valores são constantes, não variam independentemente do comprimento dos segmentos tomados. Isso acontece, pois, esses números estão diretamente ligados à medida do ângulo $\angle ACB$. Esta será a motivação para iniciarmos o estudo da trigonometria no triângulo retângulo.

Para isso, questionaremos se os alunos sabem o significado de trigonometria e discutiremos sobre as respostas. Para formalizar, a palavra trigonometria vem do grego *trigonon*, “triângulo”, e *metron*, “medida”, e nos remete ao estudo de ângulos e lados do triângulo, uma figura básica do estudo de Geometria. De outra maneira, a trigonometria é utilizada para resolver problemas geométricos que relacionam distâncias e ângulos (IEZZI et al., 2013).

A seguir, mostraremos um triângulo retângulo, e seus elementos: hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente.

Figura 1: Triângulo retângulo



Fonte: Acervo dos autores

Também formalizaremos os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo, seno, cosseno e tangente.

Figura 2: Razões trigonométricas

$$Seno = \frac{CatetoOposto}{Hipotenusa}$$

$$Cosseno = \frac{CatetoAdjacente}{Hipotenusa}$$

$$Tangente = \frac{CatetoOposto}{CatetoAdjacente}$$

Fonte: Acervo dos autores

Atividade 2: Ângulos notáveis (25 minutos)

Para essa atividade, deduziremos juntamente com os alunos os ângulos notáveis através de um quadrado e um triângulo equilátero. Os alunos deverão acompanhar a demonstração e preencher a tabela abaixo, para utilizarem posteriormente.

Tabela 1: Ângulos notáveis

	30º	45º	60º
Seno			
Cosseno			
Tangente			

Para o ângulo de 45º, considere um quadrado de lado *a* e sua diagonal, que o divide em dois triângulos retângulos cujos ângulos agudos medem 45°. Então:

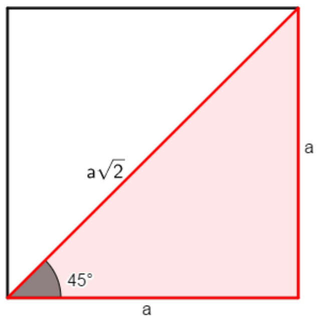
$$\text{sen } 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{a}{a} \Rightarrow \text{tg } 45° = 1$$

Conforme figura abaixo.

Figura 3: Quadrado 45º



Fonte: Acervo dos autores

Para os ângulos de 30º e 60º, considere um triângulo equilátero de lado a e sua altura, que o divide em dois triângulos retângulos cujos ângulos agudos medem 60° e 30°. Determinemos o seno, cosseno e tangente do ângulo de 60°.

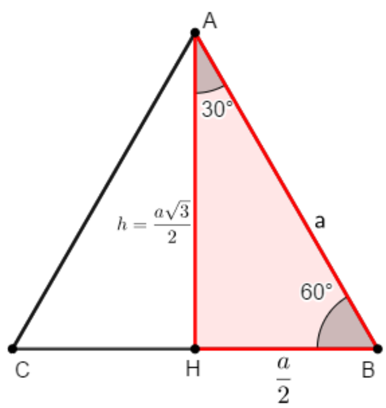
$$\text{sen } 60° = \frac{a\sqrt{3}/_2}{a} \Rightarrow \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{a/_2}{a} \Rightarrow \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{a\sqrt{3}/_2}{a/_2} \Rightarrow \text{tg } 60° = \sqrt{3}$$

Conforme figura abaixo.

Figura 4: Triângulo 60º



Fonte: Acervo dos autores

Determinemos o seno, cosseno e tangente do ângulo de 30º.

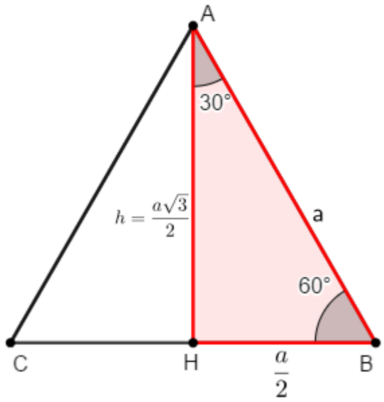
$$\text{sen } 30° = \frac{a/2}{a} \Rightarrow \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} \Rightarrow \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} \Rightarrow \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Conforme figura abaixo.

Figura 5:Triângulo 60º



Fonte: Acervo dos autores

Por fim, mostraremos uma paródia como método de fixação para as razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

Atividade 3: Aplicação das razões trigonométricas (10 minutos)

(IFSP 2014) Uma forma pouco conhecida de arte é a de preenchimento de calçadas com pedras, como vemos na calçada encontrada em Brasilândia - DF, conforme a figura.

(www.dzai.com.br/blogdaconceicao/blog/blogdaconceicao?tv_pos_id=27008 Acesso em: 25.10.2013)

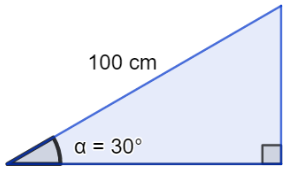
Em relação ao desenho da calçada, considere o seguinte:

- todos os triângulos são retângulos;
- cada triângulo possui um ângulo de 30°;
- a hipotenusa de cada triângulo mede 100 cm.

Com base nessas informações, quanto mede, em centímetro, cada cateto dos triângulos?

Solução: Os dados que obtemos da questão são os ilustrados abaixo.

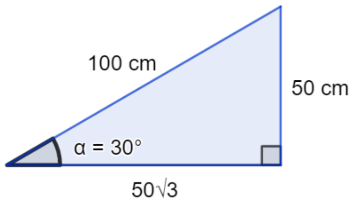
Figura 6: Triângulo da calçada 1



Fonte: Acervo dos autores

Precisamos encontrar o valor dos catetos, então calcularemos o seno de 30º para encontrar o cateto oposto, e o cosseno de 30º para o valor do cateto adjacente. Chegando assim, nos seguintes valores.

Figura 7: Triângulo da calçada 2



Fonte: Acervo dos autores

Atividade 4: Resolução da lista de exercícios e Avaliação Final (1 hora e 20 minutos)

O restante do tempo da aula será utilizado para resolução da lista de exercícios (Apêndice I) e Atividade Praticando (Apêndice II). Será solicitado que os alunos resolvam as atividades e abram o microfone ou perguntem no chat da reunião em caso de dúvidas. Conforme forem resolvendo a lista,

Avaliação

A avaliação se desenvolverá no decorrer da aula por meio da observação do desempenho dos estudantes na resolução dos problemas propostos. Após a conclusão deste módulo, aplicaremos uma atividade avaliativa utilizando formulário do *Google Forms*. Nosso objetivo é verificar se os alunos conseguem resolver problemas que envolvam razões trigonométricas, visando o entendimento de ângulos complementares através do seno e do cosseno.

Referências

EXERCÍCIOS DE TRIGONOMETRIA. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/exercicios-trigonometria/>. Acesso em: 01 jul. 2020.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **Conexões com a matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVAS E GABARITOS. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 30 jun. 2020.

PROVAS E SOLUÇÕES. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 30 jun. 2020.

Apêndice

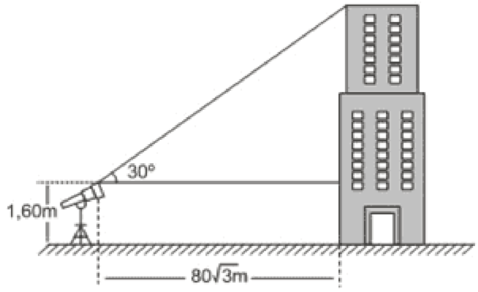
Lista de Exercícios

1) A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:
    a) 1,16 metros
    b) 3,0 metros
    c) 5,4 metros
    d) 5,6 metros
    e) 7,04 metros

2) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir:
    a) 30 cm
    b) 45 cm

c) 50 cm
d) 80 cm
e) 90 cm

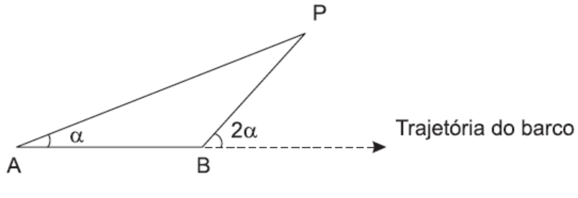
3) (UNIFOR 2014) Uma pessoa está a $80\sqrt{3}$m de um prédio e vê o topo do prédio sob um ângulo de 30°, como mostra a figura abaixo.



Se o aparelho que mede o ângulo está a 1,6m de distância do solo, então podemos afirmar que a altura do prédio em metros é:

a) 80,2
b) 81,6
c) 82,0
d) 82,5
e) 83,2

4) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



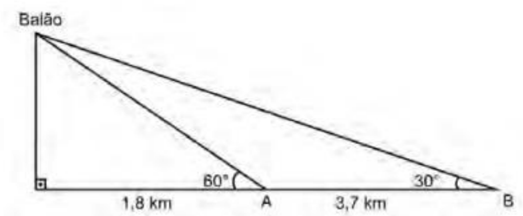
Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2000 m.

Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

a) 1000 m

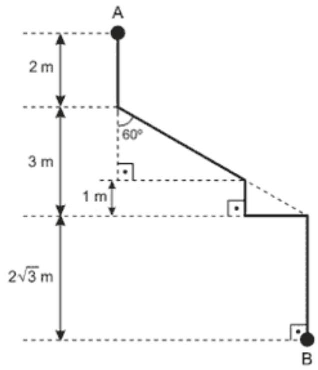
b) $1000\sqrt{3}$ m
c) $\frac{2000\sqrt{3}}{3}$ m
d) 2000 m
e) $2000\sqrt{3}$ m

5) Um balão atmosférico é lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.
Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60º; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30º. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?
a) 1,8 km
b) 1,9 km
c) 3,1 km
d) 3,7 km
e) 5,5 km

6) (CFTMG 2014) Uma formiga sai do ponto A e segue por uma trilha, representada pela linha contínua. até chegar ao ponto B. como mostra a figura.



A distância, em metros, percorrida pela formiga é:

a) $1 + 2\sqrt{3}$

b) $3 + 3\sqrt{3}$

c) $5 + 2\sqrt{3}$

d) $7 + 3\sqrt{3}$

7) (ENEM 2013) As torres *Puerta de Europa* são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

a) Menor que 100m²

b) Entre 100m² e 300m²

c) Entre 300m² e 500m²

d) Entre 500m² e 700m²

e) Maior que 700m²

2.3.1.1. Relatório do dia 29/05/2021

Aos vinte e nove dias do mês de maio de dois mil e vinte e um, reuniram-se na plataforma online *Jitsi*, nós estagiários do quarto ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado II do curso de Licenciatura em Matemática e os alunos inscritos no PROMAT, para desenvolver o primeiro encontro do segundo semestre do projeto.

Iniciamos a aula nos apresentando e para conhecermos os alunos, solicitamos que acessassem a plataforma online *Nearpod* através de um link e respondessem à pergunta proposta. Essa atividade serviu para que pudéssemos descobrir o nome, idade, local onde reside e qual curso superior cada estudante gostaria de cursar. Com esta atividade notamos que a turma é muito heterogênea, tanto quanto a idade quanto aos interesses: alguns pretendem ingressar no ensino superior, outros planejam prestar concurso público e alguns ainda não decidiram qual caminho profissional desejam seguir. Alguns dos alunos não conseguiram acessar a plataforma e por isso responderam às perguntas no bate-papo.

Para a exposição dos conteúdos, compartilhamos a tela de um computador com o quadro interativo *Jamboard*, de modo que os quatro estagiários pudessem colaborar simultaneamente. Todos os exercícios e atividades para esta aula já estavam previamente organizados no quadro interativo. Esta aula tinha como objetivo identificar e calcular o seno, cosseno e tangente de um ângulo, então iniciamos a aula com um exemplo para introduzir as razões trigonométricas no triângulo retângulo através de uma situação-problema que envolvia uma escada apoiada em um muro. Durante essa atividade os alunos se mostraram pouco participativos, por isso a maior parte da atividade foi resolvida pelos estagiários.

Em seguida, mostramos um triângulo e identificamos qual é o cateto oposto, o cateto adjacente e a hipotenusa. Além disso, mencionamos que a soma dos ângulos de um triângulo é 180º e por isso, como um triângulo retângulo possui um ângulo de 90º, a soma dos outros dois ângulos deve ser 90º, isto é, devem ser ângulos complementares. Também questionamos se os discentes conheciam o significado da palavra trigonometria, que vem do grego *trigonon* e *metron*. Uma das alunas mencionou que *trigonon* é “três ângulos” e *metron* é “medida”. Neste momento, percebemos que os alunos estavam mais participativos, principalmente pelo bate-papo.

Para tratar dos ângulos notáveis, mostramos que um quadrado pode ser dividido em dois triângulos retângulos, com ângulos de 45º. Considerando que o lado do quadrado medisse a, encontramos os valores para sen $45°$, cos $45°$ e tg $45°$. Em seguida, considerando um triângulo equilátero de lado a, determinamos os valores para sen $30°$, $\cos 30°$ e tg $30°$. Para concluir, apresentamos os valores trigonométricos para o ângulo de 60°, sugerindo que os alunos procedessem de modo análogo para determinar estes valores, lembrando que caso tivessem qualquer dúvida, poderiam nos consultar. Após isso completamos a tabela dos ângulos notáveis, conforme figura abaixo.

Figura 8: Valores notáveis.

	30º	45º	60º
Seno	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\sqrt{3}/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Os autores.

Mencionamos que é importante que os alunos saibam encontrar os valores do seno, cosseno e tangente, mas que durante provas de vestibular ou ENEM, o tempo gasto pode comprometer o desempenho, de modo que pode ser útil para decorar a tabela. Para concluir a atividade reproduzimos um vídeo chamado “Aquela música que te salva na prova! (funk da trigonometria)”, uma maneira fácil de memorizar os valores apresentados. Os comentários no bate-papo acerca do vídeo foram positivos.

Para dar continuidade à aula, resolvemos um exercício que nos tratava do ladrilhamento de uma calçada, cujos detalhes formavam desenhos com o formato de um triângulo. Com as informações dadas, era necessário que encontrasse a medida dos catetos utilizando o seno e o cosseno de 30º. A atividade foi resolvida rapidamente e os alunos não manifestaram dúvidas.

Prosseguimos com a resolução da lista de exercícios, e por conta do tempo, resolvemos apenas três dos sete exercícios preparados. As questões foram retiradas do ENEM e de vestibulares. Durante a resolução, alguns alunos foram participativos, externando dúvidas a respeito da identificação dos catetos e da montagem da relação de proporção. Para que recebêssemos *feedback* dos estudantes, enviamos um *link* para a plataforma *Wordwall*, no qual os alunos deveriam marcar a alternativa correta. Caso marcassem uma alternativa errada, o aplicativo mostraria a correta. Entretanto, o engajamento dos estudantes foi mínimo e apenas uma aluna enviou seus resultados pela plataforma.

Além disso, enviamos um formulário para que os alunos registrassem sua presença na aula. Recebemos 19 respostas, mas no início da aula, identificamos 26 pessoas na reunião, sendo 4 estagiários e o professor orientador, totalizando 21 alunos. Também no formato de formulário, enviamos uma atividade avaliativa para que os alunos praticassem os conteúdos abordados na aula. Nesse formulário os alunos deveriam enviar um arquivo com sua resposta.

Poucos alunos responderam a este formulário. Encerramos a aula disponibilizando o material utilizado em PDF, agradecemos a presença dos alunos e ressaltamos que na semana seguinte não haveria aula, por tratar-se de recesso.

2.3.2. Plano de aula do dia 12/06/2021

PROMAT – 2º Encontro

Público-Alvo:

Estudantes do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE Cascavel, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2h30.

Conteúdo:

Arcos e ângulos; circunferência trigonométrica.

Objetivo Geral:

Espera-se que ao final deste módulo o aluno possa:

- Identificar razões trigonométricas no triângulo retângulo;
- Calcular a medida de um arco de circunferência;
- Calcular o seno, cosseno e tangente de um arco;
- Identificar as funções trigonométricas e suas representações gráficas.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com circunferência trigonométrica objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Calcular a medida e o comprimento de um arco;
- Transformar a medida de um arco de grau para radiano, vice-versa;
- Calcular o seno e o cosseno de arcos trigonométricos;
- Encontrar a redução de um arco ao primeiro quadrante;
- Determinar o sinal de seno e cosseno em cada quadrante.

Recursos Didáticos:

Celular ou computador, lista de exercícios, caderno, lápis ou caneta.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula apresentando um conjunto de questões de vestibulares que tratam de arcos de circunferência e ângulos centrais da circunferência a partir de situações envolvendo o relógio analógico. Nesse momento, pretendemos introduzir os conceitos de ângulo central, arco e comprimento de arco.

Atividade 1: Ponteiros do Relógio (20 minutos)

(IFSC) É correto afirmar que o menor ângulo formado pelos ponteiros da hora e dos minutos às 8h20min é:

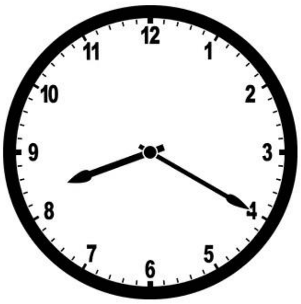
a) Entre 80° e 90°

b) Maior que 120°

c) Entre 100° e 120°

d) Menor que 90°

e) Entre 90° e 100°



Solução: Como a volta completa possui 360°, podemos ver que a cada hora, o ponteiro menor desloca-se $\frac{360}{12} = 30°$, enquanto o ponteiro maior desloca-se $\frac{360}{60} = 6°$ por minuto.

Como o ponteiro dos minutos está exatamente sobre o algarismo 4, vejamos quantos graus o ponteiro das horas "moveu-se". Note que temos um deslocamento de quatro algarismos, correspondente à 120°. Além disso, em vinte minutos o ponteiro menor percorreu mais $\frac{20}{60} \cdot 30 = 10°$. Portanto, às 8h20min os ponteiros determinam um ângulo de 130°, sendo b) a alternativa correta.

(UNESP) A figura mostra um relógio de parede, com 40 cm de diâmetro externo, marcando 1 hora e 54 minutos.

(www.euroferragens.com.br)

Usando a aproximação $\pi = 3$, a medida, em cm, do arco externo do relógio determinado pelo ângulo central agudo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos, no horário mostrado, vale aproximadamente

a) 22 b) 31 c) 34 d) 29 e) 20

Solução: Primeiramente, vamos descobrir qual a medida do ângulo central determinado pelos ponteiros neste instante. Note que, a cada hora, o ponteiro menor desloca-se $\frac{360}{12} = 30°$, enquanto o ponteiro maior desloca-se $\frac{360}{60} = 6°$ por minuto. Assim, às 1h54min o ângulo formado corresponde à $6 + 30 + 30 + 27 = 93°$.

Lembremos que o comprimento da circunferência é dado pela expressão $2\pi r$, com r representando o raio da circunferência. Neste caso, o comprimento da circunferência que representa o relógio é de 40π cm.

Logo, podemos estabelecer a seguinte relação:

Ângulo central	**Comprimento do arco (em cm)**
93°	x
360°	40π

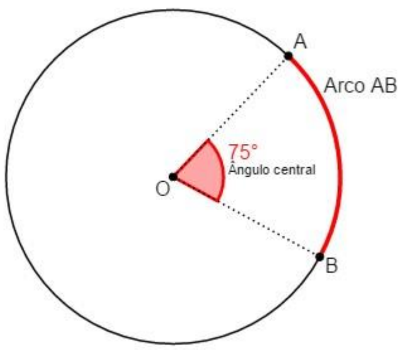
Tomando $\pi = 3$, temos que $x = \frac{40 \cdot 3 \cdot 93}{360} \Rightarrow x = 31$cm. Logo, a alternativa correta é b).

Definição: Em uma circunferência, o ângulo central é aquele cujo vértice é o centro da circunferência (LEONARDO, 2013).

Definição: A medida de um arco é igual à medida do ângulo central correspondente a esse arco (SOUZA, 2010).

Definição: O comprimento de um arco equivale a sua medida linear, dependendo do comprimento do raio da circunferência (SOUZA, 2010).

Figura 9: Arco de circunferência.



Fonte: Acervo dos autores.

Definiremos também, as medidas grau e radiano de um arco, de acordo com Souza (2010).

Definição: Ao dividirmos a circunferência em 360 partes congruentes, cada uma dessas partes corresponde a um arco de medida 1 grau (1º).

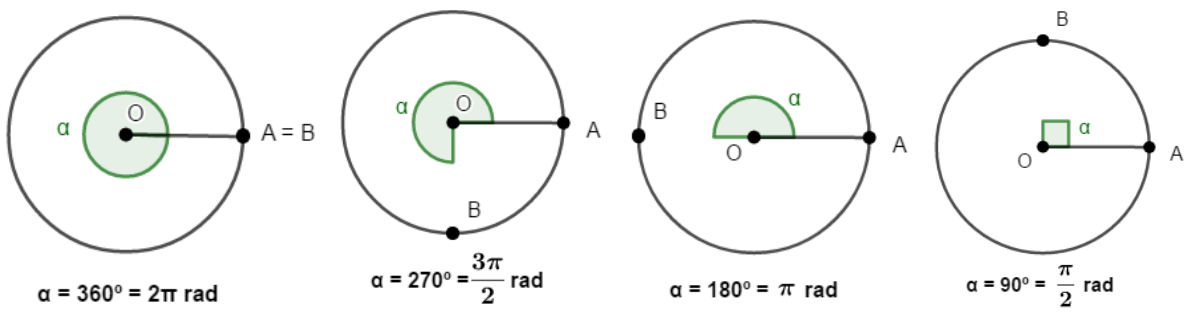
Definição: Um arco que mede um radiano (1 rad) tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência que o contém.

Atividade 2: Relação entre graus e radianos (20 minutos)

Mostraremos que o comprimento de uma circunferência é $2\pi r$ e como um radiano tem o mesmo comprimento de um raio, então um arco de uma volta corresponde a 2π rad. Isto é, 2π rad é equivalente a 360º.

Portanto podemos estabelecer uma relação entre graus e radianos, conforme mostrado a seguir.

Figura 10: Graus e radianos



Fonte: Acervo dos autores

Explicaremos também que a regra de três pode ser utilizada para estabelecer a relação entre essas grandezas e alguns exercícios serão realizados.

Depois disso, os alunos deverão resolver os seguintes exercícios baseados em Iezzi (2013).

Um arco mede 30º. Qual é a medida desse arco em radianos?

Solução: Além da regra de três, resolveremos o exercício pensando em uma semicircunferência, ou seja, 180º. Para isso, mostraremos que 30º corresponde à 6ª parte de 180º, mas como 180º = π, então 30º = $\frac{\pi}{6}$.

Um ângulo central mede $\frac{3\pi}{4}$. Quanto mede esse ângulo em graus?

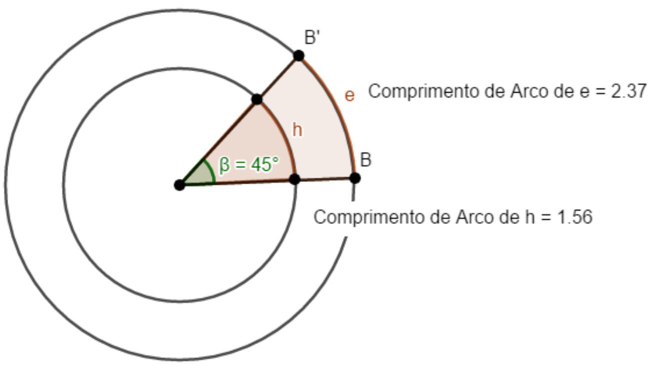
Solução: Com a regra de três, $\frac{\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{180}{x} \Rightarrow x \cdot \pi = \frac{3\pi}{4} \cdot 180 \Rightarrow x = 135^{o}$

São dados dois arcos de 45º. Um está sobre uma circunferência de 3cm de raio; o outro, sobre uma circunferência de 4cm de diâmetro. Compare esses arcos:

a) Quanto à medida angular.
b) Quanto ao comprimento.

Solução: Conforme figura abaixo, podemos notar que a medida angular é a mesma, entretanto o comprimento se modifica. Esse fato é justificado pelo fato de que a medida angular de um arco não depende do raio da circunferência e como os dois arcos medem 45º, a medida angular é 45º, já o comprimento de um arco é a medida linear do comprimento, o qual depende do raio.

Figura 11: Arcos 45º

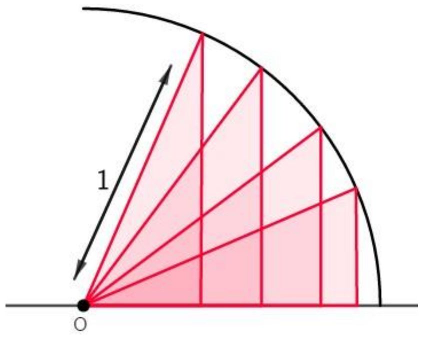


Fonte: Acervo dos autores

Atividade 3: Circunferência trigonométrica (20 minutos)

Para esta atividade, relembraremos os estudantes que as razões trigonométricas “não dependem do tamanho do triângulo, mas da medida do ângulo” (PAIVA, 2013, p. 22). Assim, para padronizar estas razões seria conveniente construir triângulos em que a medida da hipotenusa seja constante. Por conveniência, adota-se o valor da hipotenusa igual a 1, de modo que temos uma construção como a apresentada a seguir, onde cada triângulo retângulo acaba por determinar um arco de circunferência.

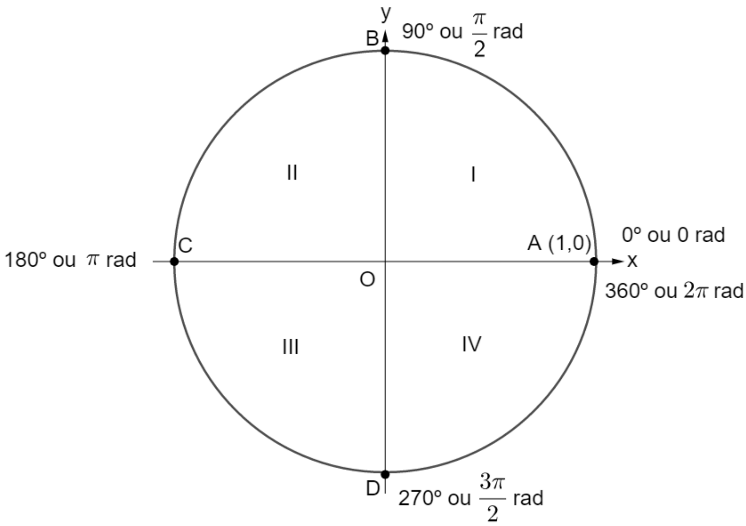
Figura 12: Triângulos retângulos.



Fonte: Acervo dos autores.

Posicionando o vértice O na origem do plano cartesiano (0,0) e traçando uma circunferência de raio 1, obtemos o que chamamos de circunferência trigonométrica. Nossa circunferência será orientada no sentido anti-horário e terá o ponto (1,0) como origem de todos os arcos. Cada uma das regiões determinadas pelos eixos cartesianos será chamada de quadrante, numerados conforme a próxima figura.

Figura 13: Circunferência trigonométrica



Fonte: Acervo dos autores

Nesta tarefa, comentaremos com a turma que é possível associar cada ponto da circunferência a um arco AP, denominado arco trigonométrico e que também podemos ter arcos negativos ou maiores que uma volta. Com isto, definiremos arcos côngruos.

Definição: Dois arcos são ditos côngruos se possuem a mesma origem e as mesmas extremidades.

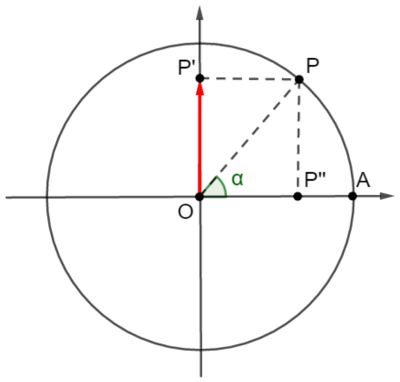
Por fim, mostraremos como determinar a primeira determinação positiva de um arco, tomando como exemplo o ângulo 1140° (cuja determinação é 60°).

Atividade 4: **Seno, cosseno e tangente de um arco (25 minutos)**

Depois de apresentar a circunferência trigonométrica, introduziremos as razões trigonométricas na circunferência.

Inicialmente, mostraremos que dado um ângulo α, $\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{PP}''}{\text{OP}} = \frac{\text{PP}''}{1} = \text{PP}'' = \text{OP}'$, pois $\text{OP} = \text{raio} = 1$, logo o eixo y é chamado de eixo dos senos.

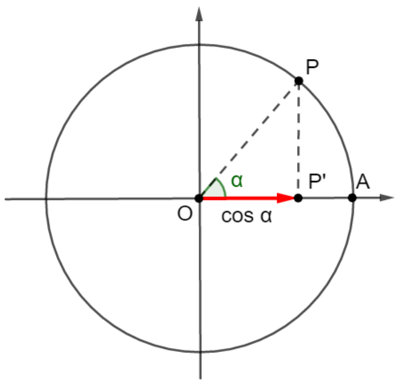
Figura 14: Seno



Fonte: Acervo dos autores

Em seguida, $\cos\alpha = \frac{\text{OP}'}{\text{OP}} = \frac{\text{OP}'}{1} = \text{OP}'$, pois $\text{OP} = \text{raio} = 1$, logo o eixo x é chamado de eixo dos cossenos.

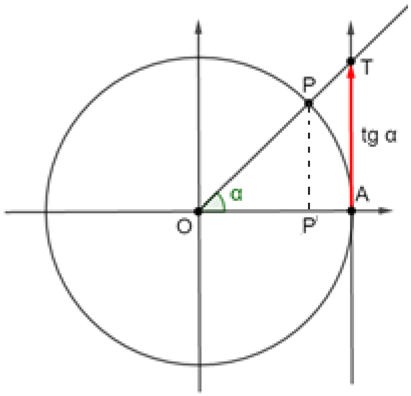
Figura 15: Cosseno



Fonte: Acervo dos autores

Por fim, a tangente é determinada ao traçar uma semirreta OP, interceptando o eixo das tangentes em um ponto T. Isto porque $\text{tg } \alpha = \frac{PP\prime}{OP\prime} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$, pois $OA = \text{raio} = 1$. Então $AT = \text{tg } \alpha$.

Figura 16: Tangente



Fonte: Acervo dos autores

Por fim, apresentaremos um quadro com o sinal das razões trigonométricas em cada quadrante.

Atividade 5: Redução ao primeiro quadrante (atividade assíncrona)

Para abordar este conteúdo, escolhemos duas vídeo aulas que tratam do assunto.

https://www.youtube.com/watch?v=isbQRBIFdJY

https://www.youtube.com/watch?v=j4ridWTDseo

Atividade 6: Resolução da lista de exercícios (1 hora e 20 minutos)

O tempo restante da aula será utilizado para resolução da lista de exercícios (Apêndice I). Caso seja possível, essa resolução será feita em grupos. Neste momento, iremos circular pela sala sanando eventuais dúvidas.

Avaliação

A avaliação se desenvolverá no decorrer da aula por meio da observação do desempenho dos estudantes na resolução dos problemas propostos, verificando se os discentes conseguem identificar arcos da circunferência e calcular suas medidas angulares e de comprimento. Ao final deste módulo, aplicaremos uma atividade avaliativa utilizando o *Google Forms*.

Referências

ANDRADE, Antônio. **Revisão de Matemática 2 – Trigonometria**. Disponível em: <http://professorwaltertadeu.mat.br/ProfAntonioRevMat22018.pdf>. Acesso em: 23 jun. 2020.

ANDRADE, Leonardo. **Trigonometria – parte I**. Disponível em: <https://docente.ifrn.edu.br/leonardoandrade/geologia-integrado-2degano-vespertino/trigonometria-parte-i>. Acesso em: 23 jun. 2020.

LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **Conexões com a matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

MÓDULO DE CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO: Radiano, Círculo Trigonométrico e Congruência de Arcos. [*S. l.*], 2018. Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/c04oipxwhcg8c.pdf>. Acesso em: 1 jul. 2020.

PAIVA, Manoel. **Matemática:** Paiva. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVAS E GABARITOS. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 15 jun. 2020.

PROVAS E SOLUÇÕES. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 15 jun. 2020.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Exercícios sobre o comprimento de um arco.** Disponível em: <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-comprimento-um-arco.htm>

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar Matemática**. v. 2 Editora FTD: São Paulo, 2010.

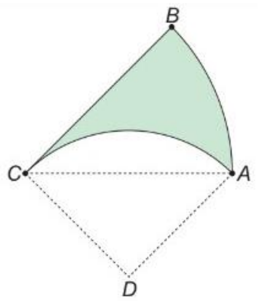
Apêndice I

Lista de Exercícios

1) (PUC–PR) Um relógio foi acertado exatamente às 6h. Que horas o relógio marcará após o ponteiro menor (das horas) ter percorrido um ângulo de 72º?

2) (UEPG – Adaptado) Uma pessoa caminhando em volta de uma praça circular descreve um arco de 160° ao percorrer 120m. Determine o diâmetro da praça.

3) (OBMEP) Na figura, o arco AC é um quarto de uma circunferência de centro D e o arco AB é um oitavo de uma circunferência de centro C. O segmento AD mede 2 cm. Qual é a área em cm² da região verde?



a) 2
b) π
c) 4
d) 2π
e) 4π

4) (IFCE – Adaptado) Considere um relógio analógico de doze horas. Qual é a medida do ângulo obtuso formado entre os ponteiros que indicam a hora e o minuto, quando o relógio marca exatamente 5 horas e 20 minutos?

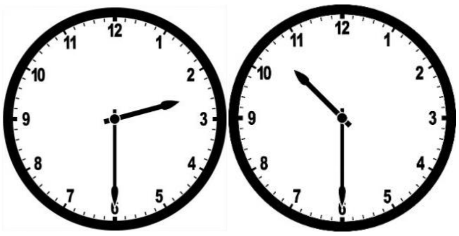
5) (UEPG – Adaptado) Um relógio analógico marca duas horas e trinta minutos. Ao lado deste, um segundo relógio marca um fuso horário diferente: dez horas e trinta minutos. Considerando o menor ângulo formado entre o ponteiro dos minutos e o ponteiro das horas, em cada um dos relógios, assinale as alternativas que considerar corretas.

( ) O ângulo no primeiro relógio é menor que 120°

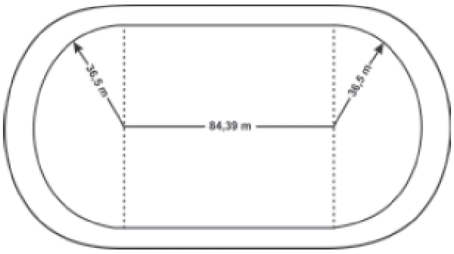
( ) O ângulo no segundo relógio é maior que 140°

( ) No primeiro relógio, o ângulo é maior que no segundo

( ) O módulo da diferença entre os ângulos dos dois relógios é 30°



6) (ENEM) O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para as extremidades e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.



BIEMBENGUT, M. S. **Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus.** 1990. Dissertação de Mestrado. IGCE/UNESP, Rio Claro,1990 (adaptado).

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?

7) (UFES) Uma curva numa linha férrea deve ser traçada em círculo. O raio que deve ser dado ao círculo para que os trilhos mudem 25º de direção numa distância de 40π metros é:

a) 308 m b) 268 m c) 258 m d) 278 m e) 288 m

8) (UFJF – Adaptado) Um ângulo do segundo quadrante tem seno igual a $\frac{12}{13}$. Quanto vale o cosseno desse ângulo?

9) (CEFET/MG – Adaptado) Sabendo-se que $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor de $\text{tg}\ \alpha$.

2.3.2.1. Relatório do dia 12/06/2021

Aos doze dias do mês de junho de dois mil e vinte e um, reuniram-se na plataforma *Jitsi*, nós estagiários do quarto ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado II do curso de Licenciatura em Matemática e os alunos inscritos no PROMAT, para desenvolver o segundo encontro do segundo semestre do projeto, tratando de trigonometria na circunferência trigonométrica.

Iniciamos a aula apresentando dois exercícios envolvendo relógio, solicitando que os discentes determinassem o ângulo formado pelos ponteiros das horas e minutos. No primeiro exercício os alunos foram participativos, respondendo que para encontrar o ângulo percorrido pelo ponteiro em hora basta dividir 360° (medida de uma volta), por 12 (quantidade de horas no relógio). No segundo exercício não houve muita participação, por tratar-se de uma questão uma questão mais sofisticada, exigindo maior interpretação do enunciado. Com esse exercício, notamos que precisamos abordar novos conceitos com exercícios mais simples, para que o conteúdo não fique confuso para os alunos.

Concluída esta parte, passamos as definições de medida de arco, comprimento de arco e radiano. Com a intenção de não apenas mostrar o que é radiano, realizamos a construção desta unidade de medida angular. Ao mostrar uma circunferência de raio 5 cm e um arco com 5 cm, de forma intuitiva, perguntamos aos alunos qual era a medida do arco: responderam 5 cm. Pedimos para que comparassem o valor do raio com o arco para que notassem que eram iguais, e então concluímos que 1 raio é igual ao arco. Nomeamos o raio como sendo rad, para mostrar que o arco = 1 rad. Utilizamos o exemplo de um arco de 10 cm, com um raio de 5 cm, no qual os alunos constataram que o arco = 2 rad. Utilizando esta noção, definimos que um arco de 180° é equivalente a π rad, medidas que utilizamos para realizar a conversão entre graus e radianos. Por fim, demonstramos como realizar a conversão de 30° para radianos e $\frac{3\pi}{4}$ rad para graus.

Passamos para a atividade relacionada à circunferência trigonométrica, explicando que para ângulos positivos utilizamos a circunferência trigonométrica no sentido anti-horário, identificamos cada um dos quadrantes e explicamos sobre a primeira determinação positiva. Nesta parte da aula os alunos participaram bastante, tendo em vista que resolvemos exemplos ilustrativos. Tratamos da primeira determinação positiva de ângulos negativos, explicando que para ângulos negativos, consideramos a circunferência no sentido horário.

Em seguida, destacamos que as razões trigonométricas não dependem do tamanho do triângulo, mas da medida do ângulo e realizamos a construção de seno, cosseno e tangente utilizando a circunferência trigonométrica. Essa construção teve por objetivo mostrar o porquê de $\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hip.}}$, $\cos\alpha = \frac{\text{cat. adjacente}}{\text{hip.}}$ e $\tan\alpha = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{cat. adjacente}}$. Além disso, mostramos os sinais das razões trigonométricas na circunferência e destacamos ainda que 90° e 270° não possuem tangente.

Havíamos planejado realizar uma atividade de redução ao primeiro quadrante, mas por conta do horário não foi possível, pois precisávamos de tempo para resolver a lista de exercícios. Deste modo, disponibilizamos o *link* de duas videoaulas que explicam este conteúdo. Estes *links* estão no plano de aula. Iniciamos a resolução da lista de exercícios, mas por conta do tempo resolvemos apenas os exercícios 1, 2 e 4.

Durante a resolução, os alunos manifestaram-se apenas na questão 4, que tratava de ângulo obtuso, momento no qual um aluno perguntou o que era este tipo de ângulo. Distinguimos então o que são ângulos retos, agudos e obtusos. Por fim, nos despedimos e concluímos a aula pedindo que os alunos respondessem o formulário de presença, para que possam receber o certificado ao fim do projeto.

2.3.3. Plano de aula do dia 19/06/2021

PROMAT – 3º Encontro

Público-Alvo:

Estudantes do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE Cascavel, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2h30.

Conteúdo:

Funções trigonométricas: domínio, imagem, período e gráfico. Relações trigonométricas.

Objetivo Geral:

Espera-se que ao final deste módulo o aluno possa:

- Identificar razões trigonométricas no triângulo retângulo;
- Calcular a medida de um arco de circunferência;
- Calcular o seno, cosseno e tangente de um arco;
- Identificas as funções trigonométricas e suas representações gráficas.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com funções trigonométricas objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar as funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente), bem como suas representações gráficas;
- Analisar a periodicidade, domínio e conjunto imagem das funções trigonométricas;
- Identificar e interpretar transformações nos gráficos das funções trigonométricas;
- Calcular o seno, cosseno e tangente da soma ou diferença de arcos;
- Aplicar os conceitos já mencionados na resolução de problemas.

Recursos Didáticos:

Jamboard, lista de exercícios, computador ou celular.

Encaminhamento metodológico:

Atividade 1: Função seno, cosseno e tangente (30 minutos)

Para trabalhar com a função seno, cosseno e tangente utilizaremos o material "O Ciclo Trigonométrico e suas Funções" no *software Geogebra*, facilitando a visualização de dos gráficos. Além disso, ao passo que apresentamos as funções, iremos obter junto com os alunos o domínio, imagem e o período.

Definições:

A **função seno** é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $y_p = \text{sen}\, x$, ou seja, $f(x) = \text{sen } x$.

A **função cosseno** é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $y_p = \cos x$, ou seja, $f(x) = \cos x$.

A **função tangente** é a função $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x $\left(\text{com exceção dos valores côngruos a } \frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{3\pi}{2}\right)$ ao número real $y_p = \tan x$, ou seja, $f(x) = \tan x$.

As definições de seno, cosseno e tangente foram retiradas do livro Conexões com a Matemática de Leonardo (2013).

Atividade 2: Plotagem de Gráficos das Transformações (20 minutos)

Esta atividade foi baseada na atividade 6 da sequência didática de Lopes (2013). Para a realização desta tarefa utilizaremos o *software Geogebra*, tendo como objetivo fazer com que os alunos entendam o comportamento do gráfico e da imagem das funções trigonométricas. Utilizaremos o projetor para instruções e auxílio, enquanto os alunos utilizam o *Geogebra* pelo *notebook* ou celular.

Primeiramente, digitaremos na caixa de entrada do *Geogebra* a função $f(x) = \sin(x)$ e observem o gráfico. Posteriormente, os estudantes devem digitar: $g(x) = 2\,\text{sen}(x)$; $h(x) = 3\text{sen}(x)$; $p(x) = 5\text{sen}(x)$; $q(x) = -2\text{sen}(x)$ e $t(x) = -4\text{sen}(x)$ na mesma janela gráfica e verificar o comportamento das funções em relação a $f(x) = \text{sen}(x)$.

Solicitaremos que analisem os gráficos e, se possível, discutam com os colegas sobre os resultados obtidos e então, perguntaremos: Quais as conclusões podem ser tiradas em relação a imagem dessas funções?

Esperamos que os alunos percebam que no caso das funções $g(x) = 2\text{sen}(x)$; $h(x) = 3\text{sen}(x)$ e $p(x) = 5\text{sen}(x)$ ocorre uma dilatação vertical e que para as funções $q(x) = -2\text{sen}(x)$ e $t(x) = -4\text{sen}(x)$, além da dilatação ocorre a simetria.

Na sequência, digitaremos a função f(x) = sin(x), seguida das funções: $g(x) = \text{sen}(2x)$; $h(x) = \text{sen}(3x)$; $t(x) = \text{sen}(4x)$. Com isso, perguntaremos: Qual o comportamento dessas funções em relação à função $f(x) = \text{sen}(x)$? O que vocês percebem em relação a imagem dessas funções?

Esperamos que os alunos identifiquem a mudança no período da função, ocasionada pela compressão do gráfico. Além disso, faremos exemplos como $\text{sen}(x+1)$ e $\text{sen}(x+2)$, para que os alunos percebam que neste caso há uma translação horizontal para a esquerda e nos casos $\text{sen}(x-1)$ e $\text{sen}(x-2)$ há translação horizontal para a direita. Já para $1+\text{sen}(x)$ e $\text{sen}(x-1)$ há translação vertical para cima a para baixo respectivamente.

Por fim, falaremos brevemente sobre a amplitude da função e para encerrar a atividade, falaremos que para a função cosseno e tangente tem o mesmo comportamento.

Atividade 3: Funções Trigonométricas Auxiliares (10 minutos)

Apresentaremos as seguintes funções auxiliares e seus gráficos, construídos no *Geogebra*.

Definição: A secante de um ângulo x é denotada por sec x e dada por:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ se } \cos x \neq 0.$$

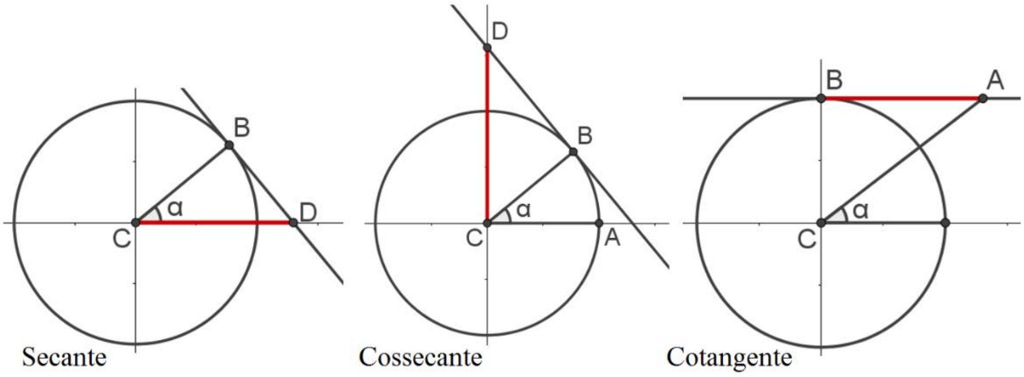
Definição: A cossecante de um ângulo x é denotada por cosec x e expressa pela seguinte razão:

$$\text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x} \text{ se sen } x \neq 0.$$

Definição: A cotangente de um ângulo x é denotada por cotg x e expressa pela seguinte razão:

$$\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} \text{ se sen } x \neq 0.$$

Figura 17: Razões inversas vistas no círculo trigonométrico.



Disponível em <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/secante-cossecante-cotangente.htm#>.

Atividade 4: Funções Trigonométricas Inversas (5 minutos)

Para apresentar as funções trigonométricas inversas, é preciso saber que apenas funções bijetoras possuem inversa, de modo que é necessário restringir domínio e imagem de funções trigonométricas para que admitam inversa. Isto posto, comentaremos com a turma que estas funções são usualmente chamadas de função arco pois retornam o arco correspondente ao valor de certa função trigonométrica, o que pode ser verificado utilizando a calculadora científica (disponível na maioria dos *smartphones*). Apresentaremos o vídeo "Trigonometria – Funções inversas: arco seno, arco cosseno, arco tangente", que traz exemplos, bem como as definições de cada umas destas funções.

Definição: A função arco seno é a função $f: [-1,1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ que associa cada número real x ao número real y = arcsen x. Veja que

$$y = \text{arcsen } x \text{ equivale a } sen\, y = x.$$

Definição: A função arco cosseno é a função $f: [-1,1] \to [0, \pi]$ que associa cada número real x ao número real y = arccos x. Veja que

$$y = \text{arccos } x \text{ equivale a } cos\, y = x.$$

Definição: A função arco tangente é a função $\text{f}: \mathbb{R} \to \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ que associa cada número real x ao número real y = arctg x. Veja que

$$y = \text{arctg } x \text{ equivale a } tg\, y = x.$$

A título de curiosidade, exibiremos os gráficos das funções trigonométricas inversas.

Atividade 5: Fórmulas para Soma de Arcos (15 minutos)

Apresentaremos os seguintes resultados aos discentes e faremos os exemplos mencionados abaixo.

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

Exemplos:

$$\text{sen}\,75° = \text{sen}\,(45° + 30°) \Rightarrow \text{sen}\,75° = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15° = \cos\,(45° - 30°) \Rightarrow \cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Comentaremos com a turma que sen 75° = cos 15° porque os arcos são complementares.

Atividade 6: Resolução da lista de exercícios (1 hora e 10 minutos)

O restante do tempo da aula será aproveitado para resolução da lista de exercícios (Apêndice I). Neste momento, iremos compartilhar resoluções com a turma, questionando suas interpretações e sanando eventuais dúvidas.

Avaliação:

A avaliação se desenvolverá no decorrer da aula por meio da observação do desempenho dos estudantes na resolução dos problemas propostos. Desejamos verificar se os alunos conseguem identificar as transformações das funções trigonométricas, visando o entendimento de domínio e imagem, bem como o cálculo de seno, cosseno e tangente de ângulos. Além disso, após a aula disponibilizaremos a atividade Praticando (Apêndice II), que abordará os principais conceitos trabalhados no Módulo 1 e será entregue a partir do formulário do *Google Forms*. Nosso objetivo é verificar se os alunos conseguem resolver problemas que envolvam razões trigonométricas, visando o entendimento de ângulos complementares através do seno e do cosseno.

Referências:

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria/Números Complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM. 2005.

EXERCÍCIOS DE TRIGONOMETRIA. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/exercicios-trigonometria/>. Acesso em: 01 jul. 2020.

FUNÇÕES trigonométricas. [*S. l.*], 2018. Disponível em: <http://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/390/matematica_trigonometria_funcoes_trigonometricas.pdf>. Acesso em: 1 jul. 2020.

GOMES, Francisco A. M. **Funções Trigonométricas Inversas**. Disponível em <https://www.ime.unicamp.br/~chico/ma092/ma092_18_f_trig_inv.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2020.

IEZZI, Gelson *et al*. **Matemática: ciência e aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2013.

LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **Conexões com a matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LOPES, Maria Maroni. **Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra**. 2013. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2013000300019>. Acesso em: 20 jun. 2020.

O CICLO TRIGONOMÉTRICO E SUAS FUNÇÕES. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/CbkDTzQ4>. Acesso em: 01 jul. 2020.

PAIVA, Manoel. **Matemática:** Paiva. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVAS E GABARITOS. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 15 jun. 2020.

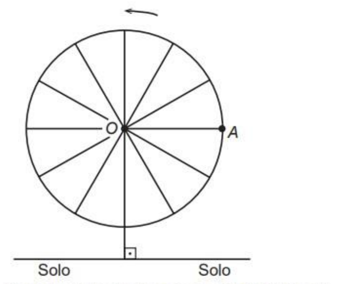
PROVAS E SOLUÇÕES. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 15 jun. 2020.

QCONCURSOS. [*S. l.*], 1 jul. 2020. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/questoes/1a98b672-4b>. Acesso em: 1 jul. 2020.

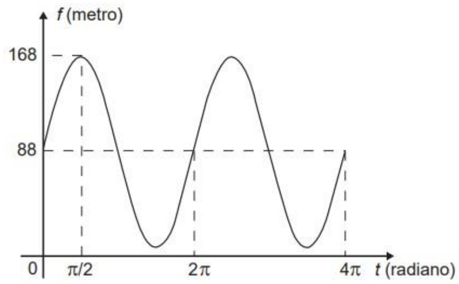
Apêndice I

Lista de Exercícios

1) (ENEM 2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por:

a) $\mathrm{f(t)} = 80\,\mathrm{sen(t)} + 88$
b) $\mathrm{f(t)} = 80\cos(\mathrm{t}) + 88$
c) $\mathrm{f(t)} = 88\cos(\mathrm{t}) + 168$
d) $\mathrm{f(t)} = 168\,\mathrm{sen(t)} + 88\cos(\mathrm{t})$
e) $\mathrm{f(t)} = 88\,\mathrm{sen(t)} + 168\cos(\mathrm{t})$

2) (UFRGS – Adaptada) Considere as funções *f* e *g* definidas por *f (x) = sen x* e *g (x) = cos x*. Qual é o número de raízes da equação *f (x) = g(x)* no intervalo $\left[-2\pi, 2\pi\right]$?

3) (ENEM 2015) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função

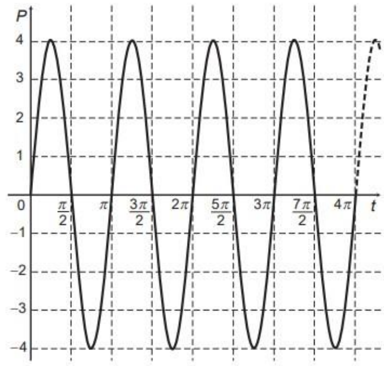
$$P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$$

onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

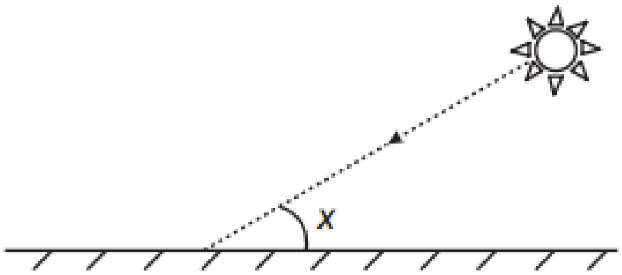
a) Janeiro
b) Abril
c) Junho
d) Julho
e) Outubro

4) (ENEM PPL 2019 – Adaptado) O gráfico representa um movimento periódico, P = P(t), em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante t, conforme ilustra a figura.



Determine a expressão algébrica que representa a posição P(t), da cabeça do pistão, em função do tempo t.

5) (ENEM 2017) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.



Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada por I(x)= k·sen (x), sendo k uma constante, e supondo que x está entre 0° e 90°. Quando x = 30°, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

a) 33%
b) 50%
c) 57%
d) 70%
e) 86%

6) (ENEM 2011) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0{,}15\cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S. O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

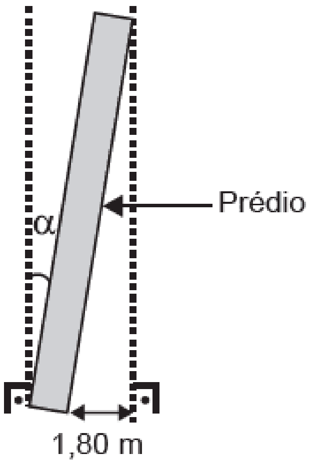
a) 12 765 km
b) 12 000 km
c) 11 730 km
d) 10 965 km
e) 5 865 km

Apêndice II

Praticando

1) A figura abaixo representa um avião que decolou sob um ângulo constante de 30° e percorreu em linha reta 8000m. Nesta situação, qual a altura que se encontrava o avião ao percorrer essa distância?

2) (ENEM 2017) Um prédio quando construído disponha-se verticalmente e tinha 60 metros de altura. Ele sofreu uma inclinação de um ângulo α e a projeção ortogonal de sua fachada lateral sobre o solo tem altura medindo 1,80 m conforme mostra a figura. O valor do ângulo de inclinação pode ser determinado fazendo-se o uso de uma tabela como a apresentada. Observando a tabela, dê uma estimativa para o ângulo de inclinação α, quando dado em grau.



Ângulo α (Grau)	Seno
0,0	0,0
1,0	0,017
1,5	0,026
1,8	0,031
2,0	0,034
3,0	0,052

2.3.3.1. Relatório do dia 19/06/2021

No dia dezenove de junho do corrente ano executamos o terceiro encontro do PROMAT, curso de matemática ofertado a estudantes da rede pública de ensino, que faz parte do estágio obrigatório da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II. Por conta da pandemia do coronavírus, as atividades propostas foram desenvolvidas remotamente com estudantes inscritos no projeto, utilizando a plataforma *Jitsi*.

No início da aula, notamos que a quantidade de estudantes presentes era pequena, de modo que aguardamos por 5 minutos para que os demais alunos ingressassem na reunião. Ao todo, 11 estudantes estiveram presentes. Como o objetivo desta aula era tratar de funções trigonométricas, iniciamos a exposição com um material do Geogebra que permitia relacionar arcos na circunferência trigonométrica aos valores de seno, cosseno e tangente, construindo a noção de função trigonométrica e os respectivos gráficos. Mencionamos o fato de que as funções trigonométricas são periódicas e aproveitamos este momento para relembrar os conceitos de domínio e imagem, destacando que a função tangente possui domínio distinto, excluindo valores múltiplos de $\frac{\pi}{2}$.

Neste primeiro momento, enfrentamos uma pequena dificuldade ao compartilhar a tela com os gráficos, pois o conteúdo compartilhado não estava visível para três participantes da reunião. Para solucionar o problema, estes usuários precisaram sair da chamada e fazer novo acesso, o que provocou uma breve interrupção na aula.

Para dar continuidade a aula, passamos a tratar das transformações de funções trigonométricas. Esta atividade consistiu em construir o gráfico de diferentes funções utilizando o Geogebra, observando as alterações no comportamento: translação (vertical e horizontal), variação da amplitude e variação no período. Enquanto construíamos as funções, indagávamos aos discentes o que aconteceria com o gráfico, momento em que vários alunos se manifestaram pelo *chat* escrito. Por exemplo, ao construir o gráfico de $\mathrm{f(x) = 4\,sen\,x}$ e compará-lo com o gráfico de sen x, os estudantes observaram que a função foi "esticada" (variação da amplitude). Realizando esta mesma comparação com o gráfico de $\mathrm{g(x) = 1 + sen\,x}$, os estudantes observaram que a função "subiu" (deslocamento vertical), enquanto a função $\mathrm{h(x) = sen\,(x + 2)}$ sofre deslocamento horizontal ("avança" ou "retrocede").

Ainda nesta atividade, questionamos o que aconteceria se multiplicássemos o valor do seno, por exemplo, por uma constante negativa. Dois estudantes manifestaram-se por escrito, dizendo que a função seria "invertida" ou "refletida", como em um espelho. Uma aluna mencionou então o termo *enantiomorfa*, explicando que trata-se de um conceito da Física em que objetos são refletidos horizontalmente de modo simétrico – sem sobreposição. Como apresentamos o exemplo da função $f(x) = -\text{sen } x$, aproveitamos para plotar $g(x) = \text{sen } (-x)$ e mencionar que o seno é uma função ímpar. Para fixar o conteúdo, apresentamos alguns exemplos com a função cosseno, mencionando que trata-se de uma função par. Com base nisso, um estudante comentou que "fora mexe em y e dentro mexe em x" (sic), isto é, considerando um caso mais geral, do tipo $a + b\,\text{sen } (cx + d)$, variar os parâmetros a e b causa alterações na imagem, enquanto alterações em c e d causam mudanças no período da função.

Na sequência, apresentamos as funções trigonométricas auxiliares (secante, cossecante e cotangente), plotando seus respectivos gráficos no Geogebra. Nesse instante, uma aluna nos questionou se o Geogebra era um *site* ou aplicativo. Informamos que o *software* pode ser acessado pelo site <www.geogebra.org> ou pelo aplicativo, disponível para computadores ou *smartphones*. Em seguida, comentamos que é comum resolvermos problemas em que precisamos "desfazer" o cálculo de uma razão trigonométrica para determinar o ângulo envolvido, para o que utilizaremos as funções inversas – arco seno, arco cosseno e arco tangente. Além de apresentar o gráfico de cada uma destas funções, exibimos um vídeo explicativo, com exemplos – material este referenciado no plano de aula.

Apresentamos ainda as fórmulas utilizadas para determinar o seno e o cosseno para a soma e diferença de arcos, resolvendo dois exemplos com a turma. Estes exemplos envolviam os ângulos de 75° e 15°, o que nos permitiu destacar que o seno de um ângulo coincide com o cosseno de seu ângulo complementar.

Após isso, disponibilizamos o formulário com a lista de presença e iniciamos a resolução da lista de exercícios. Por conta do tempo, realizamos a correção das questões 1, 2, 3 e 4. As questões 1 e 4 exigiam que os estudantes determinassem a lei de associação de uma função a partir da análise de seu gráfico. A questão 2 pedia que os estudantes determinassem valores com seno e cosseno coincidentes, tratando do conceito de raiz de uma equação ($\text{sen}\, x = \cos x$), enquanto a questão 3 tratou do valor máximo e mínimo do cosseno e do arco cosseno de -1.

As questões propostas foram retiradas do ENEM e do vestibular da UFRGS e contemplavam a inquietação de uma discente, que havia questionado como estes conteúdos poderiam "cair no vestibular" (*sic*). Para finalizar a aula, agradecemos a participação dos estudantes e lembramos do encontro na semana seguinte, momento em que se inicia um novo módulo do projeto. Posteriormente, disponibilizamos o material da aula no grupo do *Whatsapp*.

2.4. Módulo 2 – Geometria Analítica

2.4.1. Plano de aula do dia 26/06/2021

PROMAT – 4º Encontro

Público-Alvo:

Estudantes do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE Cascavel, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2h30.

Conteúdo:

Geometria Analítica: coordenadas cartesianas no plano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, pontos colineares.

Objetivo Geral:

Espera-se que ao final deste módulo o aluno possa identificar, conceituar, reconhecer e operar com os conceitos básicos da Geometria Analítica.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com conceitos básicos de Geometria Analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar (localizar) pontos no plano e determinar a distância entre eles;
- Calcular a distância entre dois pontos;
- Obter o ponto médio de um segmento;
- Verificar se três pontos são ou não colineares.

Recursos Didáticos:

Celular ou computador, lista de exercícios, caderno e lápis ou caneta.

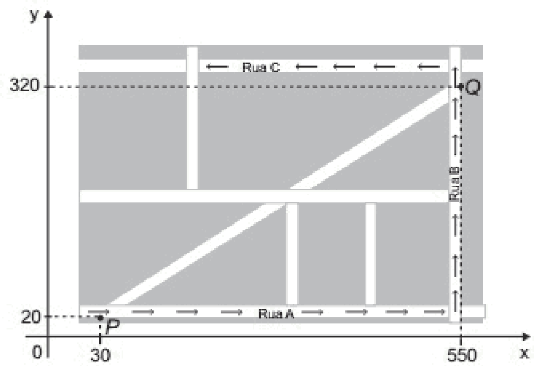
Encaminhamento metodológico:

Os tópicos anteriormente mencionados serão vistos a partir dos problemas motivadores listados a seguir.

Atividade 1: Plano Cartesiano (25 min.)

Para essa atividade, utilizaremos dois exercícios adaptados do ENEM, retirados de Stoodi (2020).

1) (ENEM 2015) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais. De acordo com os dados, quais são as coordenadas do novo ponto de parada?

Solução: O ponto P tem coordenadas (30, 20), ou seja, 30 no eixo y e 20 no eixo y. Já o ponto Q tem coordenadas (550, 320), 550 no eixo x e 320 no eixo y. Queremos encontrar uma coordenada que fique a mesma distância de P e Q, na rota do ônibus, então a distância que o ônibus percorre entre P e Q é (320-20) + (550-30) = 300 + 520 = 820, logo, a distância QT = PT = 410. Portanto, a coordenada de T será (440, 20).

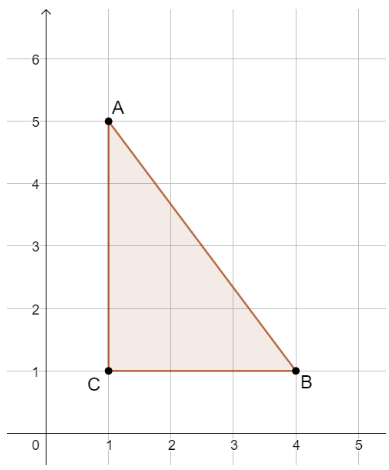
Atividade 2: Distância entre dois pontos (25 min.)

Para essa atividade, utilizaremos a malha quadriculada para que os alunos representem um triângulo retângulo e determinem a distância entre seus vértices utilizando o Teorema de Pitágoras. Exemplo adaptado de Leonardo (2013).

2) Desenhe o plano cartesiano na malha quadriculada e represente o triângulo com vértices nos pontos A (1, 5), B (4, 1) e C (1, 1). Em seguida, calcule a medida dos lados do triângulo.

Solução: A representação do triângulo na malha quadriculada deve se assimilar conforme figura abaixo.

Figura 18: Triângulo malha quadriculada

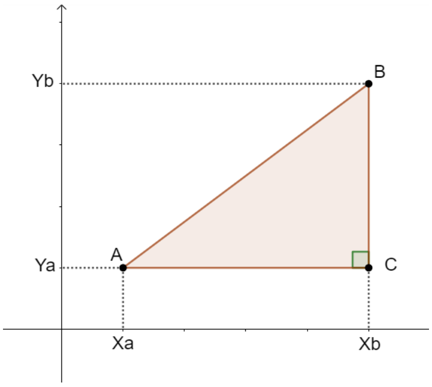


Fonte: Acervo dos autores

Para resolver o exercício, é possível notar somente com a representação na malha quadriculada, que $AC = 5 - 1 = 4$ e $BC = 4 - 1 = 3$. Para o lado AB, relembraremos que o Teorema de Pitágoras pode ser utilizado para triângulos retângulos, como é o caso desse exercício, logo, $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = (5-1)^2 + (4-1)^2 \Rightarrow AB = \sqrt{16+9} \Rightarrow AB = 5$. Nesse caso, lembraremos que o resultado será positivo, pois se trata de medida de comprimento.

3) Analise o triângulo abaixo e responda:
   a) Quais a medida dos catetos do triângulo?
   b) Qual a medida da hipotenusa do triângulo?

Figura 19: Triângulo retângulo genérico



Fonte: Acervo dos autores

Solução: Podemos notar que a medida dos catetos são: $AC = X_b - X_a$ e $BC = Y_b - Y_a$. Já a hipotenusa pode ser encontrada pelo Teorema de Pitágoras: $AB^2 = (X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2 \Rightarrow AB = \sqrt{(X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2}$.

Desse modo, deduzimos a fórmula de distância entre dois pontos, utilizando um triângulo retângulo genérico, com $A\ (X_a, Y_a)\ B\ (X_b, Y_b)$.

Atividade 3: Ponto médio de um segmento (20 min.)

Para essa atividade, buscaremos determinar as coordenadas que localizam o ponto médio entre A (4,3) e B (2,-1).

Solução: Para encontrar uma solução, apresentaremos as coordenadas do ponto médio como $\mathrm{M} = \left(\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2}\right)$. Assim, tomando os pontos A e B, faremos

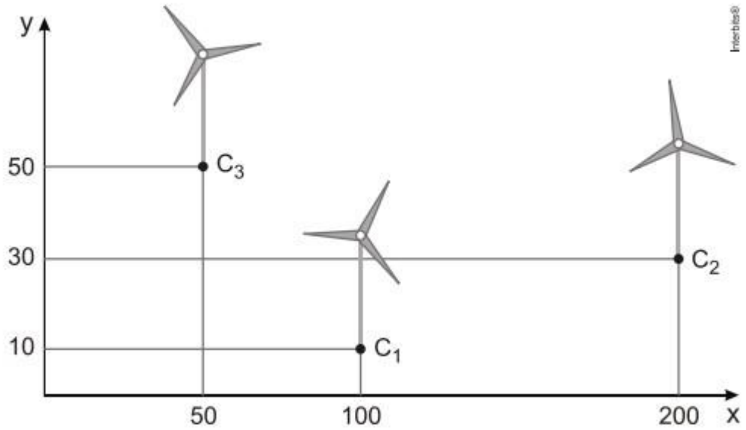
$$\mathrm{M} = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{2}{2}\right) = (3{,}1)$$

Temos, portanto, o ponto médio do segmento AB com coordenadas (3,1).

Atividade 4: Fontes de Energia (20 min.)

O seguinte problema será resolvido com a turma.

O uso de fontes de energias limpas e renováveis, como a energia eólica, geotérmica e hidráulica, é uma das ações relacionadas com a sustentabilidade que visa a diminuir o consumo de combustíveis fósseis, além de preservar os recursos minerais e diminuir a poluição do ar. Em uma estação de energia eólica, os cata-ventos C_1, C_2 e C_3 estão dispostos conforme o gráfico a seguir.



Para que um cata-vento de coordenadas (x, y) esteja alinhado com o cata-vento C_1 e com o ponto médio do segmento C_2C_3 é necessário e suficiente que

a) $2x + 5y = 850$
b) $5y - x + 50 = 0$
c) $55y - 26x + 2050 = 0$
d) $4x + 5y = 450$
e) $5y - 6x + 550 = 0$

Solução: Inicialmente, precisamos determinar as coordenadas do ponto médio de C_2C_3. Primeiramente, vejamos que $C_2 = (200, 30)$ e $C_3 = (50, 50)$. Logo, as coordenadas do ponto médio serão

$$M = \left(\frac{200 + 50}{2}, \frac{30 + 50}{2}\right) \Rightarrow M = (125{,}40)$$

Agora, queremos que os pontos $(100, 10)$, $(125, 40)$ e (x, y) sejam colineares. Para que isso aconteça, o seguinte determinante precisa ser igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 125 & 40 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4000 + 10x + 125y - 40x - 100y - 1250 = 0$$

Reorganizando a expressão, temos $25y - 30x + 2750 = 0$, que simplificamos como $5y - 6x + 550 = 0$. Logo, a alternativa correta é e).

Atividade 5: Resolução da lista de exercícios (1 hora)

O restante do tempo da aula será aproveitado para resolução da lista de exercícios (Apêndice I). Neste momento, iremos compartilhar resoluções com a turma, questionando suas interpretações e sanando eventuais dúvidas.

Avaliação:

A avaliação se desenvolverá por meio da observação do desempenho dos estudantes na resolução dos problemas propostos ao longo da aula. Pretendemos verificar se os discentes conseguem compreender o conceito de equidistante e analisar os métodos utilizados para resolução das questões de vestibular sobre distância entre dois pontos e ponto médio de um segmento. Além disso, ao final deste módulo, faremos uma avaliação utilizando o *Google Forms*.

Referências:

LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **Conexões com a Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVAS E GABARITOS. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 16 jul. 2020.

PROVAS E SOLUÇÕES. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 16 jul. 2020.

SILVA, Luís Paulo Moreira. **Exercícios sobre ponto médio de um segmento de reta.** Disponível em: <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-ponto-medio-um-segmento-reta.htm>. Acesso em 17 jul. 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar Matemática**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.

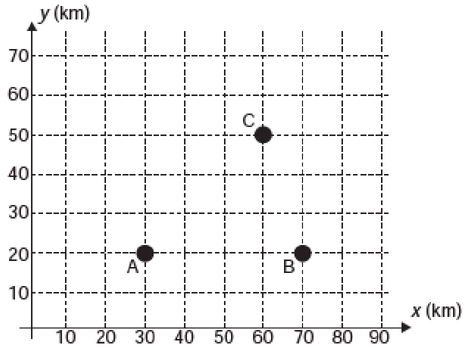
STOODI. **Exercícios de plano cartesiano**. Disponível em: <https://www.stoodi.com.br/exercicios/matematica/plano-cartesiano/>. Acesso em: 13 jul. 2020.

Apêndice

Lista de Exercícios

1) (ENEM 2013) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de

transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65; 35)
b) (53; 30)
c) (45; 35)
d) (50; 20)
e) (50; 30)

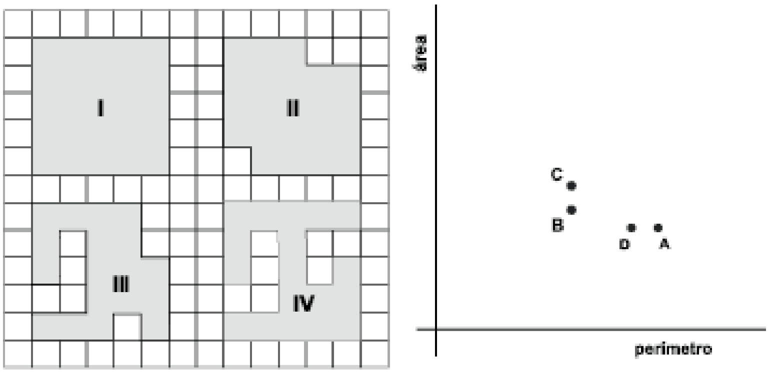
2) Os segmentos de reta AB e CD cruzam-se em seus pontos médios. Sabendo que esses segmentos determinam um paralelogramo e que A = (– 3, – 1), B = (4, 2) e C = (– 1, 2), quais são as coordenadas do ponto D?

a) D = (1, –2)
b) D = (–1, 2)
c) D = (0,5; 0,5)
d) D = (2, –2)
e) D = (2, –1)

3) Calcule o perímetro e a área de um triângulo cujos vértices são A (-1,2), B (2,6) e C (5,2).

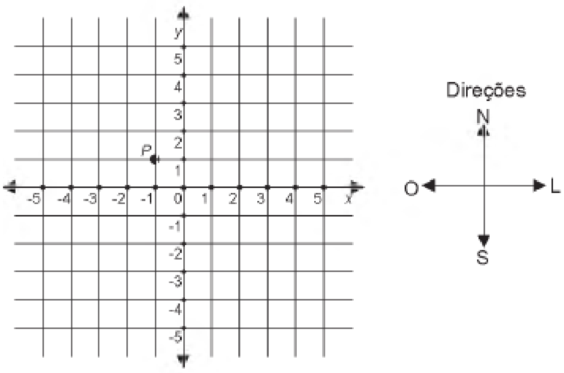
4) Considerando o triângulo de vértices A (4,5), B (4,2) e C (1,5), retângulo em A, calcule o seno do ângulo C.

5) (OBMEP 2007 – Adaptado) A figura mostra quatro polígonos desenhados em uma folha quadriculada. Para cada uma dessas figuras foi assinalado, no plano cartesiano abaixo, o ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são, respectivamente seu perímetro e sua área.



Calcule a área e o perímetro das figuras e diga qual é a correspondência correta entre os polígonos e os pontos.

6) (ENEM PPL 2014) Alunos de um curso de engenharia desenvolveram um robô "anfíbio" que executa saltos somente nas direções norte, sul, leste e oeste. Um dos alunos representou a posição inicial desse robô, no plano cartesiano, pela letra *P*, na ilustração.

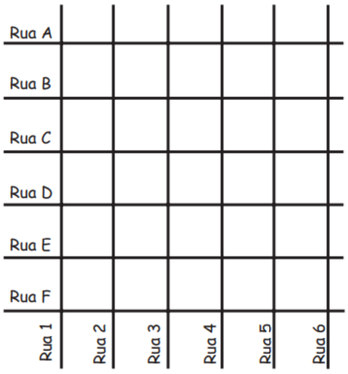


A direção norte-sul é a mesma do eixo y, sendo que o sentido norte é o sentido de crescimento de y, e a direção Leste-Oeste é a mesma do eixo x, sendo que o sentido leste é o sentido de crescimento de x. Em seguida, esse aluno deu os seguintes comandos de movimentação para o robô: 4 norte, 2 leste e 3 sul, nos quais os coeficientes numéricos representam o número de saltos do robô nas direções correspondentes, e cada salto corresponde a uma unidade do plano cartesiano. Depois de realizar os comandos dados pelo aluno, a posição do robô, no plano cartesiano, será:

a) (0; 2).

b) (0; 3).
c) (1; 2).
d) (1; 4).
e) (2; 1).

7) (ENEM 2016 – Adaptado) Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.

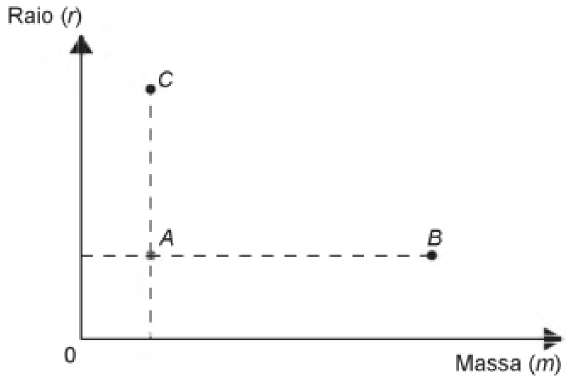


A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A. Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro de quais ruas?

8) (ENEM 2018) De acordo com a Lei Universal da Gravitação, proposta por Isaac Newton, a intensidade da força gravitacional F que a Terra exerce sobre um satélite em órbita circular é proporcional à massa m do satélite e inversamente proporcional ao quadrado do raio r da órbita, ou seja,

$$F = \frac{km}{r^2}$$

No plano cartesiano, três satélites, A, B e C, estão representados, cada um, por um ponto (m; r) cujas coordenadas são, respectivamente, a massa do satélite e o raio da sua órbita em torno da Terra.



Com base nas posições relativas dos pontos no gráfico, deseja-se comparar as intensidades F_A, F_B e F_C da força gravitacional que a Terra exerce sobre os satélites *A*, *B* e *C*, respectivamente.

As intensidades F_A, F_B e F_C expressas no gráfico satisfazem a relação

a) $F_C = F_A < F_B$

b) $F_A = F_B < F_C$

c) $F_A < F_B < F_C$

d) $F_A < F_C < F_B$

e) $F_C < F_A < F_B$

2.4.1.1. Relatório do dia 26/06/2021

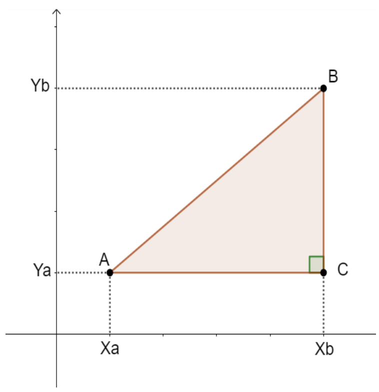
No dia vinte e seis de junho do corrente ano executamos o quarto encontro do PROMAT, curso de matemática ofertado a estudantes da rede pública de ensino, que faz parte do estágio obrigatório da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II. Por conta da pandemia do coronavírus, as atividades propostas foram desenvolvidas remotamente com estudantes inscritos no projeto, utilizando a plataforma do *Google Meet*.

Vale ressaltar que as três aulas que antecederam essa foram desenvolvidas utilizando a plataforma *Jitsi*, mas com o objetivo de resolver problemas relativos ao áudio e compartilhamento de tela, conversamos com os alunos e conforme preferência deles, decidimos migrar para o *Google Meet.* Assim, cerca de 10 minutos antes do horário da aula, encaminhamos o *link* para que os estudantes pudessem entrar na aula. No total, 11 alunos estavam presentes, que interagiram na aula principalmente através do chat e sem abrir a câmera.

Para dar início à prática, esperamos cinco minutos até que a maioria dos alunos entrassem na reunião e, em seguida, cumprimentamos a turma e informamos que o primeiro módulo de Trigonometria havia se encerrado e que a partir da presente aula, trabalharíamos com conteúdo referente a Geometria Analítica. As atividades propostas foram todas desenvolvidas utilizando-se o *Jamboard*, e partimos de uma atividade introdutória para abordar plano cartesiano.

Embora a participação dos alunos tenha sido requisitada a todo momento, a interação se mostrou baixa nessa atividade. Após resolvermos este exercício, apresentamos o conceito de plano cartesiano como um sistema de coordenadas criado por René Descartes. A atividade seguinte trazia um triângulo no plano cartesiano, com o objetivo de determinar as medidas de seus lados, conhecendo as coordenadas de seus vértices. A resolução abriu espaço para o estudo dos lados de um triângulo qualquer, buscando encontrar seus catetos e sua hipotenusa.

Figura 20: Triângulo retângulo.



Fonte: Os autores.

A análise foi feita juntamente com os alunos, para que desenvolvêssemos uma fórmula para obter a hipotenusa do triângulo, chegando à expressão $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$, obtida a partir do teorema de Pitágoras. Destacamos então que essa fórmula expressa a distância entre dois pontos. Na sequência, apresentamos o método para determinação do ponto médio, apresentando-se a fórmula e aplicando-a em um exercício que pedia as coordenadas do ponto médio entre A (4,3) e B (2, -1).

Após isso, foi utilizada uma questão da UFSM de 2013, sobre o uso de energias renováveis, com o intuito de falar sobre pontos colineares enquanto utilizamos outros conceitos vistos na aula. Destacamos o cálculo de determinantes, explicando como aplicar a regra de Sarrus, tópico que não havia sido apresentado no projeto. O engajamento dos estudantes continuou reduzido, mas detectamos uma melhora durante a resolução da lista de exercícios, com os alunos apresentando as respostas obtidas no chat da reunião.

Durante a resolução dos exercícios, disponibilizamos o formulário com a lista de presença e até o final da aula, focamos em resolver as questões juntamente com os alunos, relembrando os conteúdos trabalhados na aula. Para finalizar o encontro, agradecemos a participação dos estudantes e reforçamos o convite para a aula da semana seguinte, afirmando que se apresentassem quaisquer dúvidas na resolução dos exercícios, poderiam estar recorrendo a nós por intermédio do grupo do *WhatsApp*, no qual disponibilizamos o material da aula.

2.4.2. Plano de aula do dia 03/07/2021

PROMAT – 5º Encontro

Público-Alvo:

Estudantes do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE Cascavel, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2h30.

Conteúdo:

Geometria Analítica: equação geral e reduzida da reta, posições relativas entre duas retas no plano.

Objetivo Geral:

Espera-se que ao final deste módulo o aluno possa identificar, conceituar, reconhecer e operar com os conceitos básicos da Geometria Analítica.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com questões que envolvem conceitos abordados por nós, anteriormente, objetivamos introduzir os conceitos básicos de equação geral e reduzida de uma reta e as posições relativas entre duas retas no plano. Mais especificamente, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Obter a equação geral da reta conhecendo dois de seus pontos;
- Obter a equação de uma reta conhecendo seu coeficiente angular e um de seus pontos;
- Representar uma reta do plano por meio de sua equação geral ou equação reduzida;
- Reconhecer a posição relativa de duas retas a partir de seus coeficientes angulares.

Recursos Didáticos:

Celular ou computador, lista de exercícios, caderno e lápis ou caneta.

Encaminhamento metodológico:

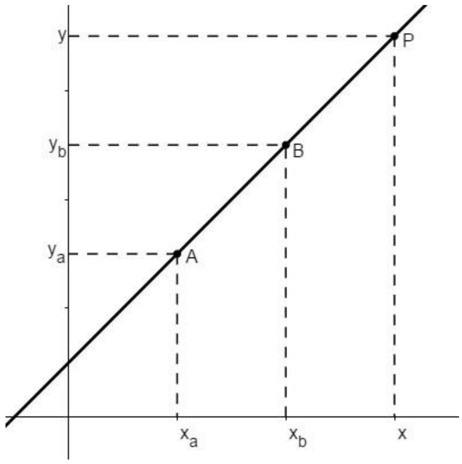
Os tópicos anteriormente mencionados serão introduzidos e suas fórmulas associadas deduzidas a partir dos problemas motivadores listados a seguir.

Atividade 1: Equação geral da reta (30 min.)

Na aula anterior vimos que três pontos A, B e C, com as respectivas coordenadas $(x_a, y_a)(x_b, y_b)$ e (x_c, y_c), são colineares quando o determinante a seguir é nulo.

$$D = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$$

Desta forma, consideremos uma reta r que passa pelos pontos A e B de coordenadas (x_a, y_a) e (x_b, y_b). Queremos saber qual característica possui um ponto que pertence a esta reta. Isto é, queremos obter uma relação entre as coordenadas (x, y) de um ponto P que pertence a r.



Para isso, consideremos a condição para o alinhamento destes pontos.

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_a - y_b)x + (x_b - x_a)y + x_a y_b - x_b y_a = 0$$

Neste determinante, as únicas variáveis são x e y, de modo que, tomando $a = (y_a - y_b), b = (x_b - x_a)$ e $c = x_a y_b - x_b y_a$, podemos reescrever essa igualdade como

$$ax + by + c = 0.$$

Esta expressão, com a e b não simultaneamente nulos, é chamada de equação geral da reta.

Para exemplo, utilizaremos os exercícios abaixo, adaptados de Leonardo (2013).

1) Obtenha a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-1, 3)$ e $B(3, 2)$.

2) Verifique se o ponto $P(3,2)$ pertence à reta cuja equação é $x - 3y + 3 = 0$

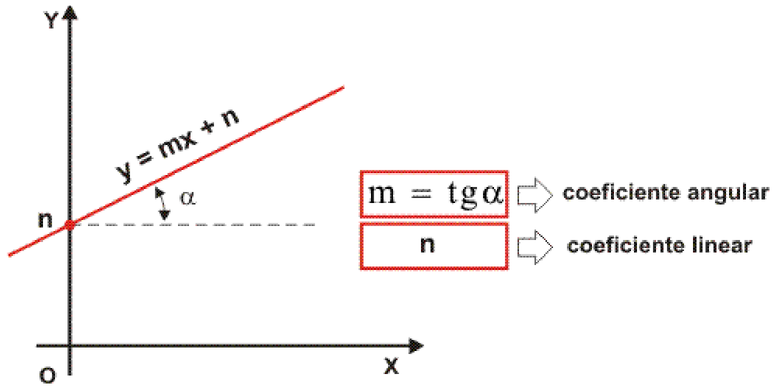
Salientaremos que para um ponto pertencer à reta, as suas coordenadas devem satisfazer a equação. Caso necessário, utilizaremos o *Geogebra* para melhor visualização dos pontos e equações dessas questões.

Atividade 2: Equação reduzida da reta (20 min.)

Nesta atividade a intenção é reescrever a fórmula obtida na Atividade 1 para obter uma nova equação mais "simples" e comumente usada. Assim, da equação geral da reta, isolamos o y, de forma que $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Para facilitar, chamamos $-\frac{a}{b} = m$ de coeficiente angular da reta, uma vez que é a tg (α), com α sendo o ângulo formado entre o eixo x e o eixo y, como veremos na Atividade 3.

Também, temos $-\frac{c}{b} = n$ o coeficiente linear da reta, que é o ponto que toca o eixo y P(0, n). Podemos perceber isso pois, quando $x = 0$, substituímos na equação e obtemos $y = n$.

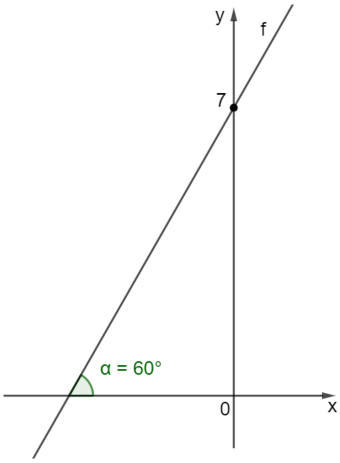
Disso, temos que $y = mx + n$



Em seguida, resolveremos dois exercícios de Leonardo (2013) com os alunos.

3) Determine os coeficientes linear e angular da reta de equação $6x - 5y - 30 = 0$.

4) Determine a equação reduzida da reta abaixo.



Nesta atividade esperamos que os alunos identifiquem o coeficiente angular e linear a partir de uma equação geral da reta e de um gráfico, para então encontrar a equação reduzida da reta.

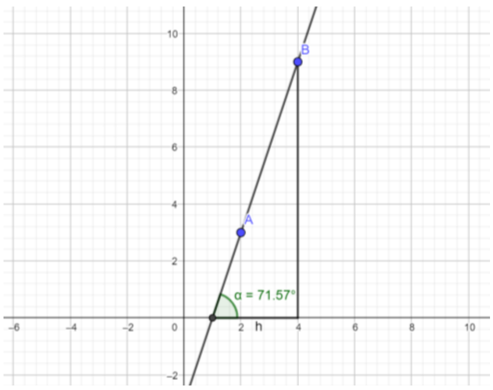
Atividade 3: Coeficiente angular da reta (20 min.)

Nesta atividade, iremos deduzir o coeficiente angular da reta a partir da tangente, para isso, utilizaremos o seguinte exercício:

5) Qual o coeficiente angular de uma reta que passa pelos pontos A (2, 3) e B (4, 9)?

Para resolvê-lo, mostraremos aos alunos a reta que passa por estes pontos no *Geogebra*, conforme a figura a seguir para que compreendam qual é o ângulo de inclinação da reta.

No caso do *Geogebra* o ângulo já é calculado automaticamente, bastando apenas calcular a tangente para obter o coeficiente angular, entretanto, trabalharemos com a ideia de que seja um ângulo desconhecido. Sabemos que podemos calcular a tangente a partir do cateto oposto e adjacente, então, mostraremos a seguinte figura para que estimule os alunos a calcularem a tangente.



Então, juntamente com os alunos, deduziremos a maneira que se calcula o coeficiente angular, explicando cada passo, ou seja:

$$k = \text{tg}\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)},\text{ onde k é o coeficiente angular.}$$

Diante disso, temos que $k = \frac{3-9}{2-4} = 3$. Vamos também, mostrar que é possível obter a equação da reta utilizando a expressão que deduzimos acima, isto é,

$$k = \frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)} \Rightarrow (y_b - y_a) = k(x_b - x_a),$$

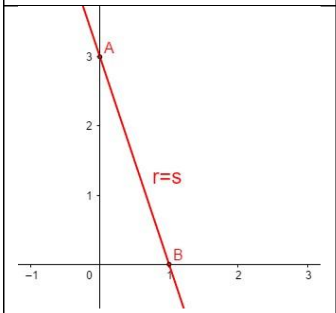
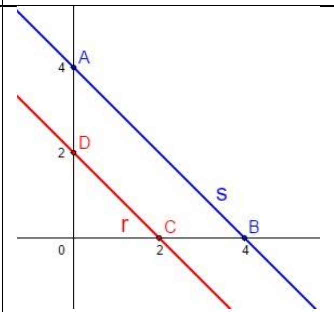
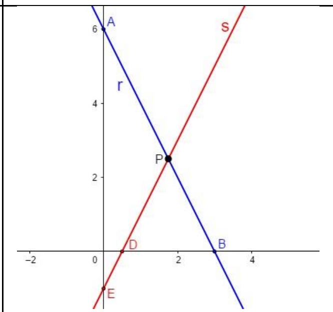
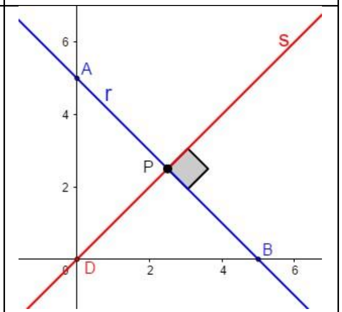
então, utilizando um dos pontos (A ou B) que o exercício apresenta, utilizando B (4,9), com k=3, que obtivemos anteriormente, temos

$$(y - 9) = 3(x - 4) \Rightarrow y = 3x - 12 + 9 \Rightarrow y = 3x - 3,$$

donde o coeficiente da reta que passa por A (2,3) e B (4,9) é 3, e a equação é dada por $y = 3x - 3$.

Atividade 4: Posição relativa entre duas retas no plano (20 min.)

Esta atividade pretende discutir as posições relativas de duas retas. Questionaremos aos alunos quais são estas posições e na sequência apresentaremos o quadro a seguir.

Retas Paralelas		Retas Concorrentes	
Coincidentes	Distintas	Não perpendiculares	Perpendiculares
			
r: 3x+y-3=0 s: 6x+2y-6=0	r: x+y-2=0 s: x+y-4=0	r: 2x+y-6=0 s: -2x+y+1=0	r: x+y-5=0 s: -x +y=0

A partir disso, indagaremos aos discentes como podemos definir a posição relativa entre duas retas a partir das equações que as definem. Esperamos que os alunos percebam que retas paralelas (coincidentes ou distintas) possuem o mesmo coeficiente angular, deduzindo consequentemente que retas concorrentes possuem coeficientes angulares distintos.

Ressaltaremos ainda que as retas coincidentes possuem o mesmo coeficiente linear e que retas com coeficientes angulares m_r, m_s são perpendiculares se, e só se, $m_r \cdot m_s = -1$.

Estes conceitos serão formalizados e resolveremos os seguintes exercícios com a turma, retirados de Paiva (2013).

6) Determine a posição relativa entre as retas a seguir.
   a) $y = 5x + 2$ e $x = 7$
   b) $6x + 3y - 1 = 0$ e $2x + y + 9 = 0$
7) Obtenha uma equação da reta r que passa pelo ponto P (1,5) e é perpendicular à reta $2x + y + 4 = 0$.

Atividade 5: Resolução de exercícios (1 hora)

O restante da aula será dedicado a resolução da lista de exercícios. Iremos compartilhar resoluções com a turma, sanando eventuais dúvidas.

Avaliação:

A avaliação se desenvolverá por meio da observação do desempenho dos estudantes na resolução dos problemas propostos ao longo da aula. Nosso objetivo é verificar se os discentes conseguem determinar a equação de uma reta que passa por dois pontos e em seguida determinar a posição relativa entre a reta determinada pelos dois pontos e outra reta. Além disso, aplicaremos uma avaliação após a conclusão deste módulo utilizando o *Google Forms*.

Referências:

ALFA CONNECTION. **Reta no Plano**. Disponível em: <https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/geometria-analitica/reta/reta-no-plano/>. Acesso nem 23 jul. 2020.

GEOMETRIA ANALÍTICA. Disponível em: <http://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/419/matematica_geometria_analitica_retas_exercicios.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2020.

LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **Conexões com a Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

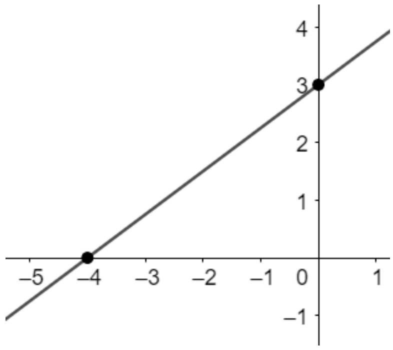
PROVAS E GABARITOS. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 16 jul. 2020.

PROVAS E SOLUÇÕES. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 16 jul. 2020.

Apêndice

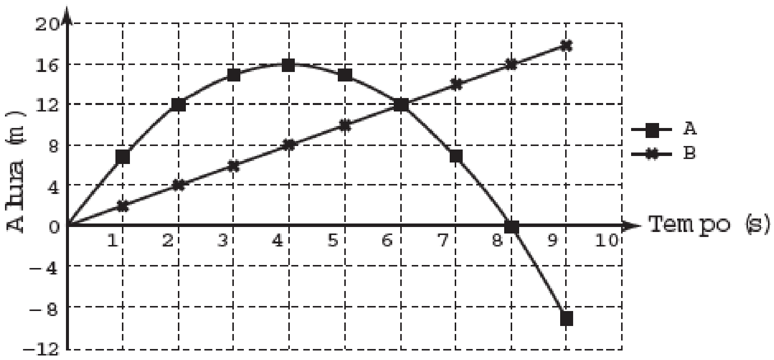
Lista de Exercícios

1) (Cesgranrio) A equação da reta mostrada na figura a seguir é:



a) $3x + 4y - 12 = 0$
b) $3x - 4y + 12 = 0$
c) $4x + 3y + 12 = 0$
d) $4x - 3y - 12 = 0$
e) $4x - 3y + 12 = 0$

2) (ENEM 2016) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.

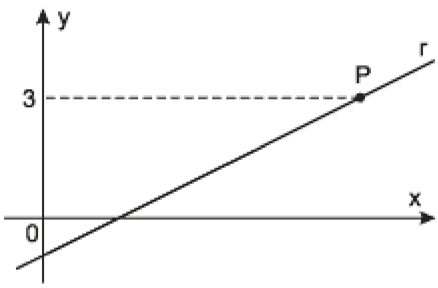


Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

a) Diminuir em 2 unidades
b) Diminuir em 4 unidades.
c) aumentar em 2 unidades.
d) Aumentar em 4 unidades.
e) Aumentar em 8 unidades.

3) (UFPR 2014) A figura abaixo apresenta o gráfico da reta r: 2y - x + 2 = 0 no plano cartesiano.

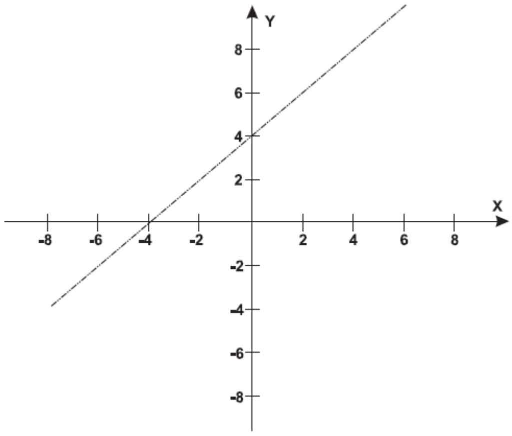


Quais são as coordenadas cartesianas do ponto P, indicado nessa figura?

4) (Fuvest) A equação da reta passando pela origem e paralela à reta determinada pelos pontos $A(2;\ 3)$ e $B(1;\ -4)$ é:

a) $y = x$
b) $y = 3x - 4$
c) $x = 7y$
d) $y = 7x$
e) n.d.a

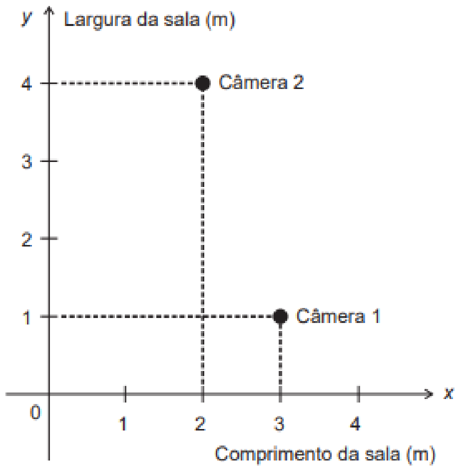
5) (ENEM 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto P = (-5, 5), localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km. Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto.

a) (–5, 0)
b) (–3, 1)
c) (–2, 1)
d) (0, 4)
e) (2, 6)

6) (ENEM PPL 2019 – Adaptado) Uma empresa, investindo na segurança, contrata uma firma para instalar mais uma câmera de segurança no teto de uma sala. Para iniciar o serviço, o representante da empresa informa ao instalador que nessa sala já estão instaladas duas câmeras e, a terceira, deverá ser colocada de maneira a ficar equidistante destas. Ele apresenta um esboço em um sistema de coordenadas cartesianas, do teto da sala, onde estão inseridas as posições das câmeras 1 e 2, conforme a figura.



Dentre as cinco relações entre as coordenadas (x, y) da posição onde a câmera 3 deverá ser instalada, qual deve ser a escolhida?

a) $y = x$

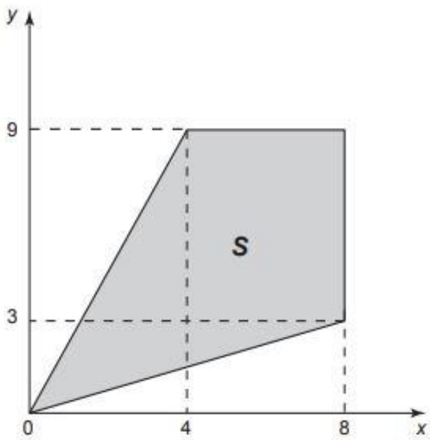
b) $y = -3x + 5$

c) $y = -3x + 10$

d) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

e) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}$

7) (ENEM PPL 2016 – Adaptado) Uma região de uma fábrica deve ser isolada, pois nela os empregados ficam expostos a riscos de acidentes. Essa região está representada pela porção de cor cinza (quadrilátero de área S) na figura.



Para que os funcionários sejam orientados sobre a localização da área isolada, cartazes informativos serão afixados por toda fábrica. Para confeccioná-los, um programador utilizará um software que permite desenhar essa região a partir de um conjunto de desigualdades algébricas. Quais são desigualdades utilizadas no software para desenhar a região em isolamento?

8) (Cesgranrio) As escalas termométricas Celsius e Fahrenheit são obtidas atribuindo-se ao ponto de fusão do gelo, sob pressão de uma atmosfera, os valores 0 (Celsius) e 32 (Fahrenheit) e à temperatura de ebulição da água, sob pressão de uma atmosfera, os valores 100 (Celsius) e 212 (Fahrenheit).
   O gráfico que representa a temperatura Fahrenheit em função da temperatura Celsius é uma reta de coeficiente angular igual a:
   a) 0,6
   b) 0,9
   c) 1
   d) 1,5
   e) 1,8

2.4.2.1. Relatório do dia 03/07/2021

No dia três de julho do corrente ano realizamos o quinto encontro do PROMAT, curso de matemática ofertado a estudantes da rede pública de ensino, como componente do estágio obrigatório da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II. Em decorrência da pandemia do coronavírus, as atividades propostas foram desenvolvidas remotamente com estudantes inscritos no projeto, utilizando a plataforma do *Google Meet*.

Para dar início à prática, esperamos cinco minutos até que os discentes entrassem na reunião e em seguida cumprimentamos os estudantes, informando que nessa aula trabalharíamos conteúdos relacionados a equação da reta. As atividades propostas foram desenvolvidas utilizando-se o *Jamboard* e o software *Geogebra.* Neste dia, 11 alunos estavam presentes e de modo geral, a aula teve pouca participação, sendo que as que ocorreram foi por meio do chat.

Iniciamos a primeira atividade relembrando a definição de pontos colineares e também como mostrar que três pontos são colineares, para em seguida encontrarmos a equação geral da reta através do cálculo de um determinante. Ao questionarmos os estudantes sobre como calcular um determinante, um dos alunos respondeu via chat que não sabia como fazer, por isso relembramos a Regra de Sarrus. Vale ressaltar que explicamos na aula anterior como calcular um determinante, entretanto este aluno não estava presente.

Além disso, relembramos fatoração com esta mesma atividade, pois quando os estudantes foram questionados se sabiam como colocar um fator em evidência, alguns responderam negativamente. Após resolvermos um exemplo, os discentes afirmaram que entenderam como proceder. Em seguida, apresentamos duas questões relativa à equação geral da reta: a primeira para obter a equação geral passando por dois pontos dados, e a segunda para verificar se um ponto pertence a uma reta de equação dada.

Na próxima atividade, encontramos a equação reduzida da reta a partir da equação geral, isolando o y. Com isso, apresentamos a ideia de coeficiente angular e coeficiente linear de uma reta, destacando que o último corresponde “ao ponto onde a reta corta o eixo y” (*sic*). Em seguida, resolvemos um exercício para determinar os coeficientes angular e linear de uma reta a partir de sua equação reduzida e um outro exercício no qual determinamos a equação reduzida da reta a partir de seu gráfico.

Utilizamos o *software Geogebra* para construir uma reta e determinar seu coeficiente angular a partir de dois pontos. Com isso mostramos que o coeficiente angular de uma reta é dado pela tangente do ângulo formado pela reta e o eixo x, que é equivalente ao quociente entre as variações nos eixos y e x. Após isso, resolvemos mais uma questão na qual precisávamos encontrar o coeficiente angular de uma reta.

Ainda utilizando o *Geogebra*, tratamos das posições relativas entre as retas. Para isso, mostramos que retas coincidentes têm equações múltiplas e portanto, possuem o mesmo coeficiente angular e linear. Mostramos também que retas paralelas distintas possuem o mesmo coeficiente angular, entretanto, o coeficiente linear é distinto. Para as retas concorrentes, mostramos que são perpendiculares se o produto entre os dois coeficientes angulares é -1. Para finalizar essa atividade, resolvemos dois exemplos determinando a posição relativa entre duas retas.

Nesta atividade, questionamos os discentes sobre como as retas deveriam ser para que fossem perpendiculares, momento em que uma aluna respondeu que "o ângulo deveria ser o mesmo" (*sic*). Com isso, notamos que essa aluna confundiu a ideia de retas perpendiculares com retas paralelas, as quais devem ter a mesma inclinação para que sejam paralelas (mesmo ângulo em relação ao eixo x). Destacamos então que retas perpendiculares determinam um ângulo reto, isto é, que mede 90°.

Após concluir as atividades planejadas para essa aula, iniciamos a resolução da lista de exercícios. Como gastamos mais tempo que previsto nas atividades anteriores, conseguimos resolver apenas dois exercícios dos oito que foram preparados para aquela aula. O primeiro exercício tinha como objetivo analisar o gráfico de uma reta e encontrar sua equação geral, utilizando para isso o cálculo de determinante. No segundo exercício, utilizamos o conceito de coeficiente angular para resolver a questão, identificando a variação na rota de um foguete. Por fim, encerramos a aula solicitando que os estudantes não deixassem de preencher o formulário com a lista de presença, reforçando o convite para a aula seguinte.

2.4.3. Plano de aula do dia 10/07/2021

PROMAT – 6º Encontro

Público-Alvo:

Estudantes do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE Cascavel, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2h30.

Conteúdo:

Geometria Analítica: equação geral e reduzida da circunferência, posições relativas entre duas circunferências, posições relativas entre reta e circunferência, posições relativas entre ponto e circunferência.

Objetivo Geral:

Espera-se que ao final deste módulo o aluno possa identificar, conceituar, reconhecer e operar com os conceitos básicos da Geometria Analítica.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com conceitos básicos de geometria analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Obter a equação reduzida da circunferência conhecendo as coordenadas do centro e a medida do raio;
- Obter a equação geral da circunferência conhecendo seu centro e o raio;
- Determinar o raio e o centro de uma circunferência a partir de sua equação, geral ou reduzida;
- Reconhecer a posição relativa entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências.

Recursos Didáticos:

Celular ou computador, lista de exercícios, caderno, lápis ou caneta.

Encaminhamento metodológico:

Os conteúdos mencionados acima serão vistos a partir das atividades motivadoras listadas a seguir.

Atividade 1: Equação reduzida da circunferência (20 min.)

Vamos iniciar a aula relembrando a definição de circunferência.

Definição: Dado um ponto $C\,(a, b)$, a circunferência de centro C é formada pelo conjunto de pontos P (x, y) que estão à mesma distância r de C, sendo r o raio da circunferência.

Assim, retomando a fórmula da distância, dizemos que um ponto P pertence à uma circunferência de centro C e raio r se, e somente se,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r.$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, obtemos a expressão conhecida como equação reduzida da circunferência, que é

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Atividade 2: Equação geral da circunferência (20 min.)

Nesta atividade pretendemos reescrever a expressão obtida na Atividade 1 para obter uma equação geral da circunferência. Para isso, desenvolvemos os quadrados da equação reduzida.

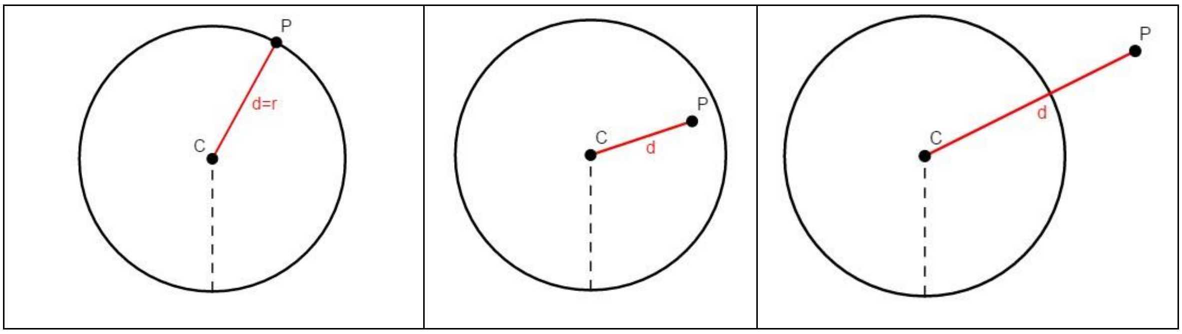
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Sendo $c = a^2 + b^2 - r^2$.

Atividade 3: Posição relativa entre circunferência e ponto (20 min.)

Para iniciar a esta atividade, questionaremos a turma sobre a relação entre um ponto e uma circunferência. Esperamos que os estudantes afirmem que um ponto pode ou não pertencer a uma circunferência. Com isso, apresentaremos o quadro a seguir.

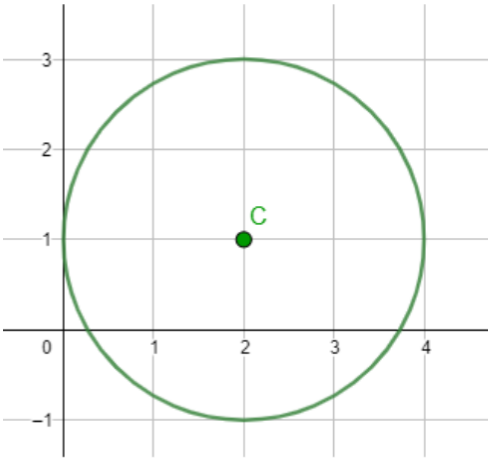
Pertencente à circunferência	**Interior**	**Exterior**



Pretendemos formalizar a ideia de pertencimento utilizando o conceito de distância, visto em aulas anteriores. Para isso, comparamos o raio r da circunferência com a distância d entre um ponto P (x,y) ao centro C da circunferência. Se $d = r$, o ponto pertence à circunferência. Se $d < r$ temos um ponto interior e se $d > r$, um ponto exterior.

Em seguida, resolveremos um exemplo, conforme questão abaixo.

Qual a posição relativa entre a circunferência abaixo e o ponto P (4, 3)?

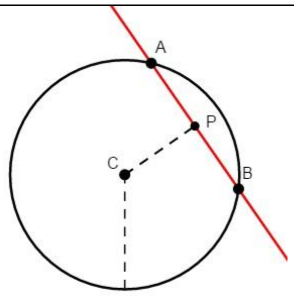
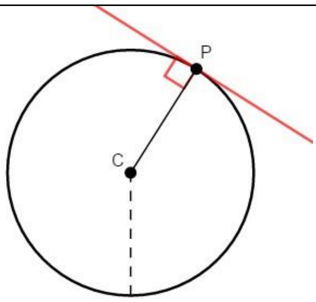
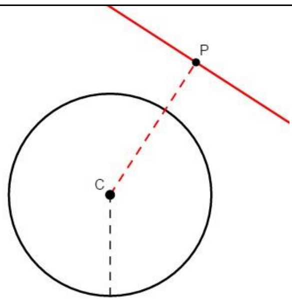


Neste exercício resolveremos encontrando a distância entre o ponto P e o centro C, mas também mostraremos que apenas marcando o ponto P já notamos que é um ponto externo a circunferência.

Atividade 4: Posição relativa entre circunferência e reta e entre duas circunferências (20 min.)

Assim como na atividade anterior, questionaremos aos alunos quais posições podem existir entre circunferência e reta. A partir das respostas emitidas, apresentaremos o quadro a seguir.

Reta Secante	**Reta Tangente**	**Reta Exterior**

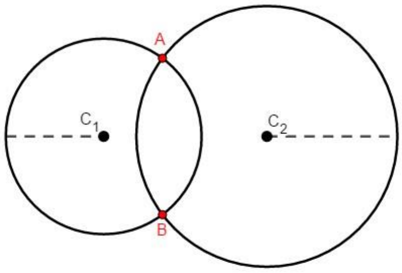
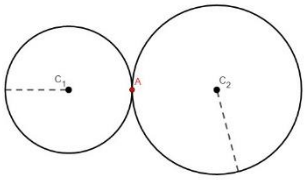
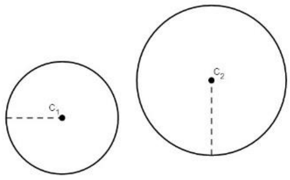
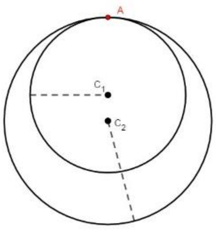
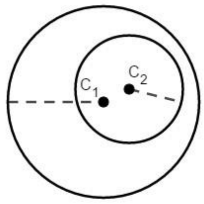
		
Dois pontos em comum	Um ponto em comum	Nenhum ponto em comum

Com base nas imagens e em nossa intervenção, a expectativa é que os alunos vejam que, no caso da reta secante, os pontos de interseção devem pertencer simultaneamente à reta e à circunferência, de modo que a igualdade entre as equações deve fornecer dois pontos. Analogamente, no caso da reta tangente tal igualdade nos fornecerá um ponto em comum e no caso da reta exterior, a igualdade gera um conjunto vazio.

Em seguida, resolveremos com os estudantes o seguinte problema, retirado de Leonardo (2013) e apresentaremos, após resolvido, a plotagem da reta e circunferência no software *Geogebra*.

1) Qual a posição relativa entre a reta r de equação $x + y + 1 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$?

Após isso, discutiremos também as posições relativas de duas circunferências. Questionaremos aos alunos quais são estas posições e na sequência apresentaremos o quadro a seguir.

Circunferências Secantes	**Circunferências Tangentes**	**Circunferências Disjuntas**
	 exteriores	 exteriores
	 interiores	 interiores

Dois pontos em comum	Um ponto em comum	Nenhum ponto em comum

Estes conceitos serão apenas apresentados aos alunos.

Atividade 5: Resolução da lista de exercícios (20 min.)

O tempo restante será dedicado a resolução da lista de exercícios e no esclarecimento de possíveis dúvidas.

Avaliação:

A avaliação se desenvolverá por meio da observação do desempenho dos estudantes na resolução dos problemas propostos ao longo da aula, desenvolvendo-as juntamente com os professores, seja comentando através do chat da chamada ou abrindo o microfone. Nosso objetivo geral é verificar se os discentes são capazes de determinar a equação de uma circunferência a partir do centro e raio, bem como interpretar as posições relativas apresentadas durante a aula. Como revisão do módulo finalizado, durante a semana será também enviado por meio do grupo no *WhatsApp* um formulário com alguns exercícios do módulo e solicitado que os alunos mandem fotos de suas resoluções.

Referências:

GEOMETRIA ANALÍTICA. Disponível em: <https://www.nucleoensino.com/wp-content/uploads/2020/03/GEOMETRIA-ANAL%C3%8DTICA.pdf>. Acesso em: 03 ago. 2020.

LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **Conexões com a Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVAS E GABARITOS. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 16 jul. 2020.

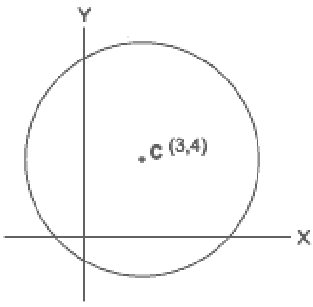
PROVAS E SOLUÇÕES. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 16 jul. 2020.

STOODI. Exercícios de plano cartesiano. Disponível em: <https://www.stoodi.com.br/exercicios/matematica/plano-cartesiano/>. Acesso em: 27 jul 2020.

Apêndice

Lista de Exercícios

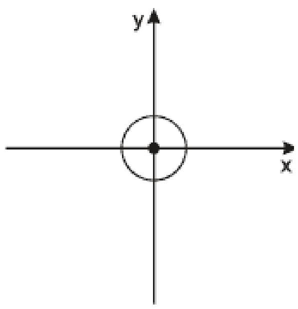
1) (UEMA 2015) Um fabricante de brinquedos utiliza material reciclado: garrafas, latinhas e outros. Um dos brinquedos despertou a atenção de um estudante de Geometria, por ser confeccionado da seguinte forma: amarra-se um barbante em um bico de garrafa pet cortada e, na extremidade, cola-se uma bola de plástico que, ao girar em torno do bico, forma uma circunferência. O estudante representou-a no sistema por coordenadas cartesianas, conforme a figura a seguir



Considerando o tamanho do barbante igual a 6 unidades de comprimento (u.c.) e o bico centrado no ponto (3,4), qual equação representa a circunferência descrita?

2) (UFSM 2015) Uma antena de telefone celular rural cobre uma região circular de área igual a 900π km^2. Essa antena está localizada no centro da região circular e sua posição no sistema cartesiano, com medidas em quilômetros, é o ponto (0, 10). Assim, qual é a equação da circunferência que delimita essa região circular?

3) (PUCRS 2014) Resolver a questão com base na regra 2 da FIFA, segundo a qual a bola oficial de futebol deve ter sua maior circunferência medindo de 68cm a 70cm. Considerando essa maior circunferência com 70cm e usando um referencial cartesiano para representá-la, como no desenho abaixo, poderíamos apresentar sua equação como:



a) $x^2 + y^2 = \frac{35}{\pi}$

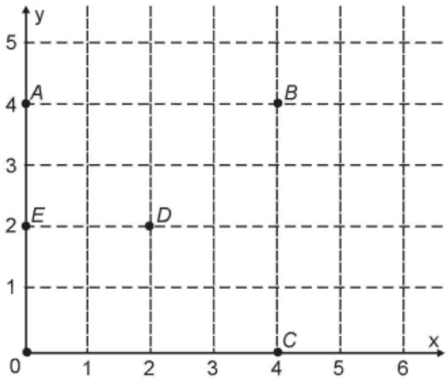
b) $x^2 + y^2 = \left(\frac{35}{\pi}\right)^2$

c) $x^2 + y^2 = \frac{70}{\pi}$

d) $x^2 + y^2 = \left(\frac{70}{\pi}\right)^2$

e) $x^2 + y^2 = 70^2$

4) (ENEM 2018 – Adaptado) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando “tiros”, seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A (0; 4), B (4; 4), C (4; 0), D (2; 2) e E (0; 2).

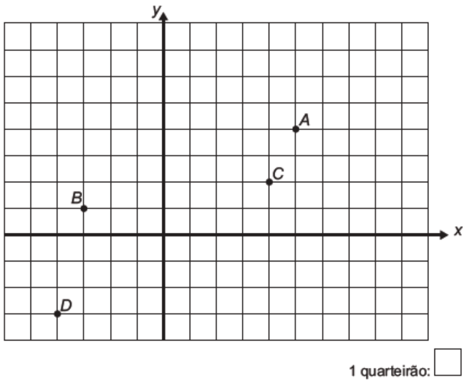


Passando pelo ponto A, qual equação forneceria a maior pontuação?

5) (UEG 2015) Um espelho no formato de circunferência foi pendurado em uma parede. Considerando o canto inferior esquerdo como a origem de um sistema cartesiano, o espelho pode ser representado pela equação da circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7{,}84 = 0$. Dessa forma, constata-se que o espelho está a uma altura do chão de quantos metros?

6) (ENEM PPL 2015 – Adaptado) Considere que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano, sendo a origem o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desconsideradas

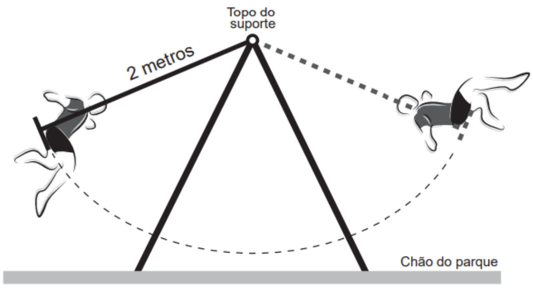
e todos os quarteirões são quadrados de mesma área e a medida de seu lado é a unidade do sistema. A seguir há uma representação dessa situação, em que os pontos A, B, C e D representam estabelecimentos comerciais desse bairro.



Suponha que uma rádio comunitária, de fraco sinal, garante área de cobertura para todo estabelecimento que se encontre num ponto cujas coordenadas satisfaçam à inequação: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leq 0$.

A fim de avaliar a qualidade do sinal, e proporcionar uma futura melhora, a assistência técnica da rádio realizou uma inspeção para saber quais estabelecimentos estavam dentro da área de cobertura, pois estes conseguem ouvir a rádio enquanto os outros não. Quais são os estabelecimentos que conseguem ouvir a rádio?

7) (ENEM 2014 – Adaptado) A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.

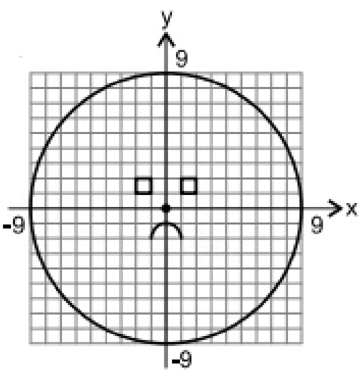


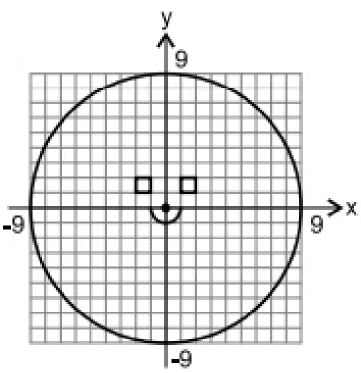
Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo x é paralelo ao chão do parque, e o eixo y tem orientação positiva para cima. A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte de uma circunferência. Qual é a equação dessa circunferência?

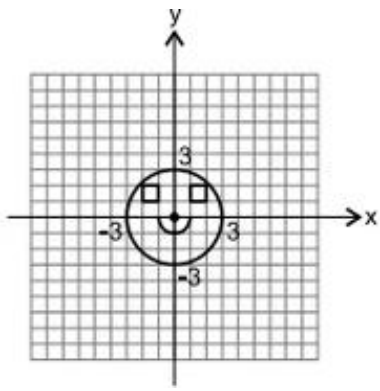
8) (ENEM 2013) Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, como se segue:

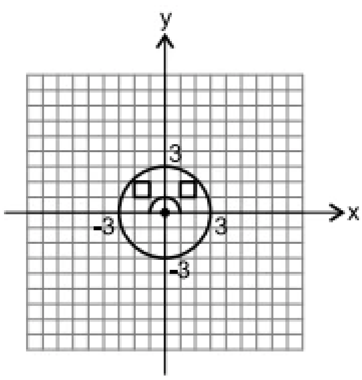
- I é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$
- II é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de – 1 a 1;
- III é o quadrado formado pelos vértices (– 2, 1), (– 1, 1), (– 1, 2) e (– 2, 2);
- IV é o quadrado formado pelos vértices (1, 1), (2, 1), (2, 2) e (1, 2);
- V é o ponto (0, 0).

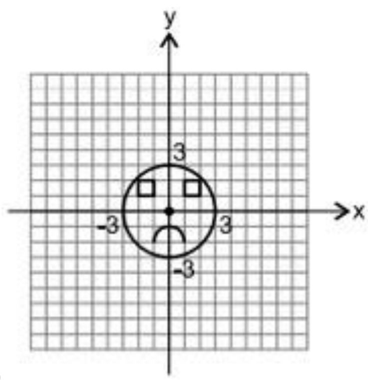
Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?

a) 

b) 

c) 

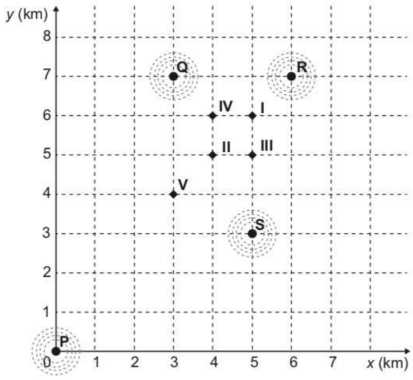
d) 

e) 

9) (ENEM 2019) Um aplicativo de relacionamentos funciona da seguinte forma: o usuário cria um perfil com foto e informações pessoais, indica as características dos usuários com quem deseja estabelecer contato e determina um raio de abrangência a partir da sua localização. O aplicativo identifica as pessoas que se encaixam no perfil desejado e que

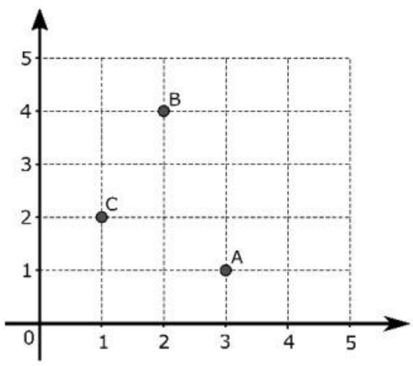
estão a uma distância do usuário menor ou igual ao raio de abrangência. Caso dois usuários tenham perfis compatíveis e estejam numa região de abrangência comum a ambos, o aplicativo promove o contato entre os usuários, o que é chamado de *match*.

O usuário P define um raio de abrangência com medida de 3 km e busca ampliar a possibilidade de obter um *match* se deslocando para a região central da cidade, que concentra um maior número de usuários. O gráfico ilustra alguns bares que o usuário P costuma frequentar para ativar o aplicativo, indicados por I, II, III, IV e V.



Sabe-se que os usuários Q, R e S, cujas posições estão descritas pelo gráfico, são compatíveis com o usuário P, e que estes definiram raios de abrangência respectivamente iguais a 3 km, 2 km e 5 km. Com base no gráfico e nas afirmações anteriores, em qual bar o usuário P teria a possibilidade de um *match* com os usuários Q, R e S, simultaneamente?

10) (UEPG 2018 – Adaptado) A figura abaixo mostra a representação dos pontos A, B e C no plano cartesiano.



Determine a equação da circunferência de centro A que passa pelo ponto C.

11) (UEG 2018 – Adaptado) Uma circunferência no primeiro quadrante tangencia os eixos coordenados. Sabendo-se que a distância entre o centro (x, y) dessa circunferência e a origem do sistema é $3\sqrt{2}$, determine a equação da circunferência.

2.4.3.1. Relatório do dia 10/07/2021

No dia dez de julho do corrente ano realizamos o sexto encontro do PROMAT, curso de matemática ofertado a estudantes da rede pública de ensino, que é componente do estágio obrigatório da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II. Devido a pandemia do coronavírus, as atividades propostas foram desenvolvidas remotamente com os alunos inscritos no projeto, utilizando a plataforma *Google Meet*.

Antes de iniciarmos a aula, aguardamos aproximadamente cinco minutos para os que alunos ingressassem no *Meet*, tendo em vista que havia apenas dois alunos na reunião. Passado algum tempo, estávamos com cinco alunos. Como parte de nosso estágio, precisamos registrar alguns encontros do projeto, de modo que comunicamos aos estudantes que iríamos gravar a reunião para fins educativos.

Neste encontro, tratamos da equação da circunferência. Com a primeira atividade buscamos determinar a equação reduzida da circunferência. Iniciamos a apresentação questionando se os alunos saberiam distinguir círculo e circunferência. Pelo chat, uma aluna respondeu que "circunferência é o contorno" (*sic*). Assentimos, destacando a definição de circunferência como lugar geométrico: conjunto de pontos equidistantes do centro. Para obter a equação utilizamos a distância entre dois pontos, então perguntamos aos alunos se eles lembravam como se calcula a distância entre dois pontos. Não obtivemos resposta para esta pergunta, mas a mesma aluna respondeu que lembrava da fórmula do comprimento da circunferência. Após deduzindo a equação reduzida da circunferência resolvemos dois exemplos: um deles conhecendo o centro e o raio da circunferência, e outro exemplo em que conhecíamos as coordenadas do centro e de um ponto da circunferência. Não tivemos participação na resolução.

Utilizando a equação reduzida da circunferência, realizamos a dedução da equação geral da circunferência. Para tanto, perguntamos aos alunos se tinham alguma ideia para expandir a equação reduzida e obter a geral: "abrir os produtos notáveis" foi a resposta que obtivemos. A partir disso, realizamos as manipulações algébricas até resultar na equação geral. O engajamento nesta atividade foi baixo.

Na sequência, tratamos da posição relativa entre circunferência e ponto, atividade em que mostramos através da representação gráfica a diferença entre ponto interno, ponto da circunferência e ponto externo. Além disso, resolvemos um exemplo de como determinar a posição relativa de um ponto à circunferência. Posteriormente, apresentamos um quadro com as posições relativas entre circunferência e reta e resolvemos um exemplo, igualando as equações da reta e da circunferência e descobrindo as coordenadas da interseção. Ao final da resolução deste exemplo, utilizamos o *Geogebra* para verificar que tratava-se de uma reta secante à circunferência. Comentamos ainda sobre posições relativas entre duas circunferências.

Terminadas as quatro atividades, prosseguimos com a resolução da lista de exercícios. Para esta aula, diferentemente das anteriores, nos sobrou mais tempo para trabalhar com a lista de exercícios, embora houvesse pouca participação. Durante a resolução pudemos revisar alguns conceitos além dos trabalhados na aula, como fatoração (completamento de quadrados) e equação (de uma forma geral). Em apenas um dos exercícios uma das alunas fez uma pergunta. Estávamos resolvendo uma questão em que a equação reduzida era igual a equação geral da circunferência, então a aluna perguntou se as duas equações eram de fato iguais, neste caso. Explicamos sobre o conceito de equações coincidentes e que no caso da circunferência de centro na origem isto ocorre.

Concluímos a resolução de seis exercícios, percebendo que de maneira geral a participação dos alunos foi mais baixa que nas aulas anteriores. Encerramos a reunião comunicando que na semana seguinte iniciaríamos um novo módulo e pedindo que os alunos respondessem o formulário da lista de presença. Como de costume, nos colocamos à disposição em caso de dúvidas e disponibilizamos o material da aula através do grupo do *Whatsapp*.

2.5. Módulo 3 – Análise Combinatória e Probabilidade

2.5.1. Plano de aula do dia 17/07/2021

PROMAT – 7º Encontro

Público-Alvo:

Estudantes do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE Cascavel, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2h30.

Conteúdo:

Análise Combinatória e Probabilidade: princípio fundamental da contagem; permutação.

Objetivo Geral:

Espera-se que ao final deste módulo o aluno possa identificar, conceituar, reconhecer e operar com os conceitos básicos de Análise Combinatória e Probabilidade.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com conceitos básicos de contagem, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar e aplicar o princípio fundamental da contagem multiplicativo e aditivo na resolução de questões;
- Construir o diagrama de árvore de um experimento;
- Calcular o fatorial de um número natural;
- Calcular o número de permutações simples e permutações com elementos repetidos;
- Reconhecer o conceito de permutação simples e repetida em situações e utilizar o conceito a fim de solucionar as questões propostas.

Recursos Didáticos:

Celular ou computador, lista de exercícios, caderno e lápis ou caneta, *software* Mentimeter.

Encaminhamento metodológico:

Os conteúdos mencionados acima serão vistos a partir das atividades motivadoras listadas a seguir.

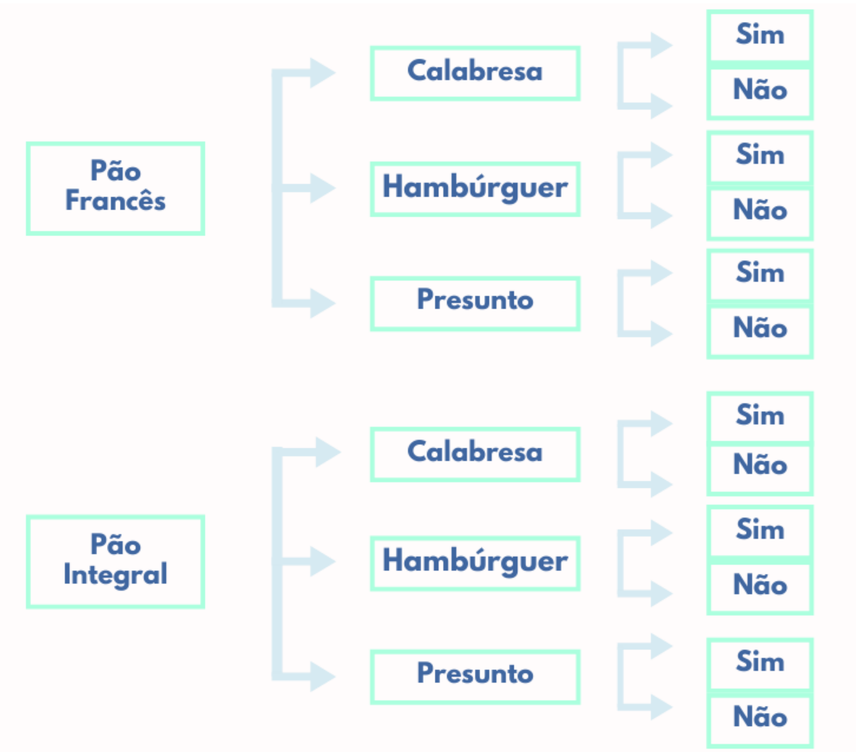
Atividade 1: Princípio Fundamental da Contagem (20 min.)

Vamos iniciar a aula apresentando as seguintes questões, retiradas de um livro didático do Ensino Médio, Leonardo (2013) e da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP).

Uma lanchonete permite que o cliente monte seu próprio sanduíche. Para isso, deverá escolher entre dois tipos de pão: francês ou integral. O recheio poderá ser de presunto, calabresa ou hambúrguer e o cliente pode ou não adicionar queijo. Quantos tipos de sanduíche podem ser montados? (LEONARDO, 2013)

Solução: O pão poderá ser escolhido de 2 maneiras, enquanto o recheio pode ser escolhido de 3 modos. Por fim, o sanduíche pode ou não ter queijo, o que nos fornece mais duas opções de escolha. Assim, existem $2 \times 3 \times 2 = 12$ modos de montar um sanduíche.

Montando a árvore de possibilidades:



(OBMEP 2015) Maria faz uma lista de todos os números de dois algarismos usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. Por exemplo, os números 20 e 22 estão na lista de Maria, mas 02 não. Quantos números diferentes há nessa lista?

Solução: Como queremos números de dois algarismos, o primeiro dígito deve ser diferente de zero, isto é, escolhemos um algarismo dentre {1, 2, 5}, donde temos 3 opções. O segundo dígito poderá ser escolhido de 4 modos, já que qualquer um dos dígitos de 2015 poderá ser utilizado. Logo, existem $3 \times 4 = 12$ números nesta lista.

A partir desses problemas, apresentaremos o princípio multiplicativo, também chamado Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Se um acontecimento A pode ocorrer de m maneiras distintas e, para uma dessas maneiras, um acontecimento B pode ocorrer de n maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrência dos eventos A e B é dada pelo produto m · n.

Atividade 2: Princípio Aditivo (20 min.)

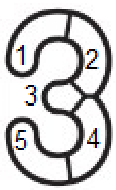
Vamos propor o seguinte problema aos estudantes.

(OBMEP 2012) Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura abaixo, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

a) De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?
b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?
c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?

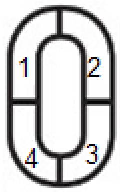
Solução:

a) Temos 3 opções para a parte superior do número e 2 opções para a parte inferior. Logo, o número pode ser pintado de $3 \times 2 = 6$ modos.
b) Considere a seguinte numeração das regiões do algarismo 3.



Seguindo essa sequência, temos respectivamente, três, duas, duas, uma e duas opções de cor em cada uma dessas regiões. Assim, há $3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 = 24$ modos de pintar o algarismo 3.

c) Considere a seguinte numeração das regiões do algarismo 0.



Teremos que considerar dois casos: as regiões 1 e 3 possuem a mesma cor ou as regiões 1 e 3 possuem cores distintas.

Caso 1 e 3 possuam a mesma cor: temos três opções de cor para as regiões 1 e 3, duas opções para a região 2 e duas opções para a região 4, totalizando $3 \times 2 \times 2 = 12$ modos de pintar o algarismo.

Caso 1 e 3 possuam cores distintas: temos três opções de cor para a região 1, duas opções de cor para a região 3 e apenas uma opção para as regiões 2 e 4, totalizando $3 \times 2 = 6$ modos de color o zero.

Assim, há $12 + 6 = 8$ modos de colorir este algarismo.

Esperamos que os alunos percebam que a pintura do zero precisou ser dividida em casos. A partir disso, vamos apresentar o princípio aditivo, definido a seguir.

Sejam A e B conjuntos finitos, o número de elementos da união e A e B é dado por

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

A notação n(A) representa o número de elementos do conjunto A.

Atividade 3: Fatorial de um número natural (10 min.)

Para introduzir o conceito de fatorial, resolveremos o exercício abaixo.

De quantas maneiras diferentes posso pintar as faixas de uma bandeira de 3 listras sem repetir as cores?

Com isso, apresentaremos a definição de fatorial, motivada pelos exemplos e exercícios vistos até o momento.

O fatorial de um número natural $n \geq 2$ é representado por n! (lê-se “n fatorial”) e é definido por como o produto dos números naturais de 1 até n, isto é,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

Se n = 0 ou n = 1, definimos n! = 1;

Atividade 4: Permutação Simples (20 min.)

Para motivar a definição de permutação simples, utilizaremos o Mentimeter apresentando o conceito de anagrama, que é uma palavra obtida pela troca da ordem das letras de outra palavra. Por exemplo, ROMA é um anagrama de AMOR.

Depois disso, também no Mentimeter, formaremos uma nuvem de palavras com os anagramas da palavra GATO que os próprios alunos enviarão através de um link, no qual poderão colocar três anagramas. Com a nuvem de palavra, reforçaremos que anagramas não precisam ser um significado e que também, a própria palavra é considerada um anagrama.

Em seguida, encontraremos o número de anagramas da palavra GATO, através do princípio multiplicativo e com isso, apresentaremos a definição de permutação e a expressão que nos permite calcular o número de permutações simples de n elementos.

Dado um conjunto com n elementos, chamamos de permutação simples dos n elementos qualquer sequência (ou agrupamento) destes elementos.

O número de permutações simples de n elementos é dado por

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

$$P_n = n!$$

A partir disso, vamos propor a seguinte situação-problema:

André acabou de criar um e-mail e planejava utilizar a palavra ANDRÉ como senha. Entretanto, como medida de segurança contra invasões, o provedor de e-mails não permite que o nome do usuário seja utilizado como senha. Assim, para que a senha escolhida fosse de fácil memorização, André decidiu utilizar um anagrama de seu próprio nome como senha. Assim, quantas são as senhas que ele pode formar?

Solução: André irá formar uma palavra de 5 letras utilizando as letras {A, N, D, R, E}. Assim, terá 5 opções para a primeira letra, 4 opções para a segunda letra, 3 opções para a terceira letra, 2 opções para a quarta letra e apenas uma opção para a última. Assim, poderá formar $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ anagramas. Como a senha ANDRÉ não é permitida, ele poderá escolher dentre 119 senhas.

Esperamos que os estudantes percebam que essas palavras foram obtidas alterando a ordem das letras, ou seja, permutando-as, e que o total de permutações está relacionado ao total de letras da palavra.

Atividade 5: Permutação com repetição (20 min.)

Aproveitando a situação apresentada anteriormente, reformulamos nosso problema:

Amanda também criou um e-mail e pretende utilizar um anagrama como senha. Você acredita que ela pode escolher entre um número de senhas maior que as disponíveis para André? Quantas senhas Amanda irá formar?

Solução: Amanda irá escolher dentre as 6 letras do conjunto {A, M, A, N, D, A} para ocupar cada uma das 6 posições na senha formada. Inicialmente, podemos pensar que ela formaria $6! = 720$ anagramas. Contudo, ao calcular esse fatorial acabamos contando algumas senhas duas vezes: observe que as senhas AMNDAA e AMNDAA coincidem, pois apesar das letras A em cores distintas permutarem entre si, a senha final possui mesmo significado para o provedor de e-mails. Assim, contamos repetidas vezes as permutações entre letras repetidas. Como temos 3 letras A, contamos $3! = 6$ vezes cada permutação.

Assim, o total de anagramas formados é $\frac{720}{6} = 120$, e como a senha AMANDA não é permitida, ela poderá escolher dentre 119 senhas.

Este problema pretende apresentar a ideia de permutação com repetição. Esperamos que os alunos percebam que, apesar de AMANDA possuir mais caracteres que ANDRÉ, o total de permutações não será maior pois teremos letras repetidas. Com isso, vamos apresentar a seguinte definição:

O número de permutações de n elementos, dos quais um elemento se repete n_1 vezes, um elemento se repete n_2 vezes, ..., um k-ésimo elemento se repete n_k vezes é igual a

$$P_n^{n_1, n_2, \cdots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

Atividade 6: Resolução da lista de exercícios (60 min.)

O tempo restante da aula será utilizado para resolução da lista de exercícios (consultar Apêndice). Pretendemos estimular o engajamento dos alunos e solucionar eventuais dúvidas.

Avaliação:

A avaliação se desenvolverá por meio da observação do desempenho dos estudantes na resolução dos problemas propostos ao longo da aula, especialmente das questões da lista de exercícios. Nosso objetivo geral é verificar se os discentes são capazes de aplicar o princípio fundamental da contagem na resolução de problemas, calculando também o número de permutações de n elementos. Ao final do módulo, faremos também uma avaliação utilizando o *Google Forms*.

Referências
LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **Conexões com a Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVAS E GABARITOS. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 02 out. 2020.

PROVAS E SOLUÇÕES. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 02 out. 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar Matemática**. São Paulo: FTD, 2010.

UEM, Universidade Estadual de Maringá. **Comissão do Vestibular Unificado**. Disponível em: <http://www.vestibular.uem.br/>. Acesso em: 26 set. 2020.

UEPG, Universidade Estadual de Ponta Grossa. **Coordenadoria de Processos de Seleção**. Disponível em: <https://cps.uepg.br/inicio/>. Acesso em: 26 set. 2020.

UFPR, Universidade Federal do Paraná. **Núcleo de Concursos**. Disponível em: <http://portal.nc.ufpr.br/PortalNC/Home>. Acesso em: 26 set. 2020.

Apêndice

Lista de Exercícios

1) (ENEM 2007) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

grupos taxonômicos	número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

T&C Amazônia, ano 1, n.º 3, dez./2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos — uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a

a) 1329

b) 2090

c) 5845
d) 6600
e) 7245

2) (ENEM 2019 – Adaptado) Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão. Qual a quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir?

3) (ENEM 2004) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

4) (UNICAMP – 2020) Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a:

a) 48
b) 72
c) 96
d) 120

5) (UPF 2005 – Adaptado) Quantos são os anagramas da palavra MELHOR, que começam e terminam por vogal?

6) (ENEM 2013) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.
Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

a) $\frac{62^6}{10^6}$
b) $\frac{62!}{10!}$
c) $\frac{62!4!}{10!56!}$
d) $62! - 10!$
e) $62^6 - 10^6$

7) (ENEM 2010) Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

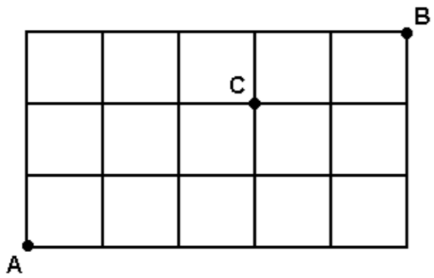
Museus Nacionais	**Museus Internacionais**
Masp – São Paulo	**Louvre** – Paris
MAM – São Paulo	**Prado** – Madri
Ipiranga – São Paulo	**British Museum** – Londres
Imperial – Petrópolis	**Metropolitan** – Nova York

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

a) 6
b) 8
c) 20
d) 24
e) 36

8) (OBMEP 2005) Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

9) (UFRGS 1998) No desenho a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas, e os quadrados representam quarteirões. Qual quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A e B que passam por C?



10) (UCPEL – Adaptado) Alterando-se as posições das letras da palavra JANEIRO, determine o número de permutações nas quais as vogais aparecem sempre juntas.

11) (ENEM 2019 – Adaptado) Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

2.5.1.1. Relatório do dia 17/07/2021

No dia dezessete de julho do corrente ano realizamos o sétimo encontro do PROMAT, curso de matemática ofertado a estudantes da rede pública de ensino como componente da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II. Por conta da pandemia do coronavírus, as atividades propostas foram desenvolvidas remotamente com estudantes inscritos no projeto, utilizando a plataforma *Google Meet*.

No início da aula, percebemos que poucos estudantes haviam ingressado na reunião, de modo que aguardamos por 5 minutos a chegada dos demais alunos. Ao todo, 9 estudantes estiveram presentes. Iniciamos a exposição destacando que o objetivo desta aula era tratar do princípio fundamental da contagem, iniciando o módulo de Análise Combinatória e Probabilidade. Como de praxe, avisamos a turma que a reunião seria gravada e utilizada para fins educativos, como parte de nosso estágio obrigatório.

Para iniciar a discussão sobre princípio multiplicativo, foram apresentados dois exemplos distintos, sobre montagem de um sanduíche e composição de um número de dois algarismos utilizando os dígitos $\{0, 1, 2, 5\}$. Durante a resolução do primeiro problema, construímos a árvore de possibilidades, afirmando que conforme o número de variáveis envolvidas cresce, é mais adequado recorrer ao princípio multiplicativo. Na sequência, apresentamos um exercício que utilizava o princípio aditivo, desenhando a árvore de possibilidades e destacando a necessidade da chamada “divisão em casos”.

Após resolvermos mais um exercício envolvendo o princípio aditivo, passamos a tratar do conceito de fatorial e de permutações. Após apresentarmos um exemplo envolvendo a pintura de bandeiras, questionamos se os estudantes conheciam anagramas. Como não tivemos retorno positivo, explicamos que o anagrama de uma palavra corresponde a qualquer mudança na ordem de suas letras, trazendo como exemplo a palavra AMOR, e alguns de seus anagramas, como ROMA, AMRO e OMAR, destacando que o anagrama não precisa “fazer sentido” (*sic*). Utilizamos então a ferramenta *Mentimeter*, solicitando que os alunos acessassem um pequeno formulário em que deveriam listar (anonimamente) três anagramas da palavra GATO. Uma nuvem de palavras foi formada com as respostas fornecidas pelos estudantes. Destacamos que nem todos os estudantes acessaram o *link* disponibilizado, pois estavam utilizando apenas um dispositivo móvel e não conseguiam “trocar de tela” sem abandonar a aula.

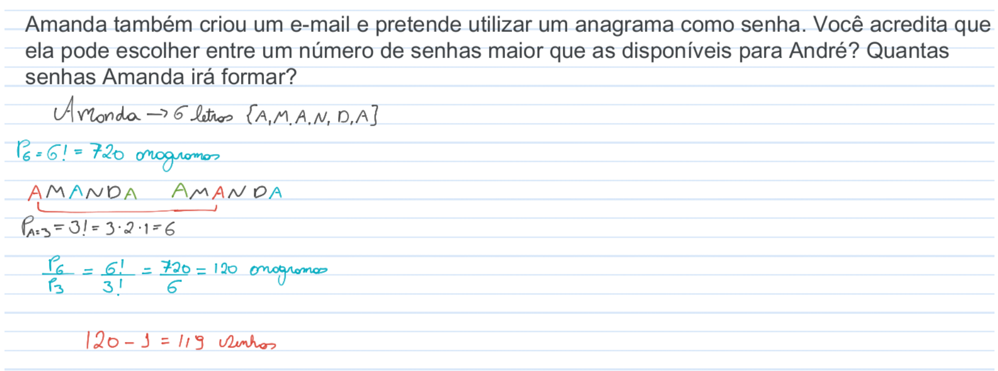
Figura 21: Nuvem de palavras.

Fonte: Os autores.

Percebemos que vários alunos mencionaram os mesmos anagramas, que aparecem em destaque na figura acima – GOTA, TOGA e TAGO. Como foram listados apenas 8 anagramas, questionamos se estes eram os únicos anagramas possíveis ou se existiram outros. Um aluno sugeriu que seriam 9, afirmando que "não tinha ideia" (*sic*) de quantos anagramas existiriam. Outra discente então afirmou que seriam 24 anagramas, o que confirmamos ao apresentar o conceito de permutação simples.

Na sequência, resolvemos um exercício sobre a criação de senhas para um e-mail, utilizando anagramas do nome ANDRÉ. Ainda com esta motivação, questionamos os estudantes sobre a quantidade de anagramas do nome AMANDA. Uma das alunas sugeriu que usássemos o 4! (quatro caracteres, A, M, N e D) ou que calculássemos o fatorial considerando "todas as letras, dividir pelas repetições" (*sic*). Destacamos que o último procedimento sugerido é o correto, e questionamos se a aluna já havia estudado esse conteúdo anteriormente. Ela assentiu, dizendo "eu amo esse conteúdo" (*sic*).

Figura 22: Resolução de exercício.



Fonte: Os autores.

Após definirmos permutação com repetição, passamos para a resolução de exercícios, utilizando questões retiradas do ENEM e de vestibulares. Durante este momento, destacamos que quando temos que escolher *A e B* (por exemplo, *cor e modelo* de um celular), usamos o princípio multiplicativo e quando escolhemos *A ou B* (por exemplo, *marca A ou marca B*), utilizamos o princípio aditivo. Como um dos docentes não pôde acompanhar a aula até o final, disponibilizamos junto ao material da aula a resolução de dois exercícios em vídeo, de modo assíncrono.

Encerramos o encontro agradecendo a participação dos estudantes e deixando um desafio como tarefa de casa: pedimos que os alunos calculassem o número de anagramas de seus nomes. Como de costume, nos colocamos à disposição em caso de dúvidas.

2.5.2. Plano de aula do dia 24/07/2021

PROMAT – 8º Encontro

Público-Alvo:

Estudantes do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE Cascavel, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2h30min.

Conteúdo:

Análise Combinatória e Probabilidade: arranjo e combinação.

Objetivo Geral:

Espera-se que ao final deste módulo o aluno possa identificar, conceituar, reconhecer e operar com os conceitos básicos de Análise Combinatória e Probabilidade.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com conceitos básicos de contagem e combinatória, objetiva-se que o aluno seja capaz de

- reconhecer a natureza de um problema de contagem;
- diferenciar um arranjo de uma combinação;
- calcular o número de arranjos simples e arranjos com repetição de n elementos tomados p a p;
- calcular o número de combinações de n elementos tomados p a p;
- aplicar os conceitos de arranjo e combinação na resolução de problemas.

Recursos Didáticos:

Celular ou computador, lista de exercícios, caderno e lápis ou caneta.

Encaminhamento metodológico:

Os conteúdos mencionados acima serão vistos a partir das tarefas motivadoras listadas a seguir.

Atividade 1: Princípio Fundamental da Contagem (10 min.)

Para iniciar a aula, vamos relembrar a aplicação do princípio fundamental da contagem utilizando uma questão da tarefa proposta na aula anterior.

(ENEM 2019 – Adaptado) Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão. Qual a quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir?

Atividade 2: Diferença entre Arranjo e Combinação (20 min.)

Para esta tarefa, apresentaremos os seguintes problemas de Diferença (2020).

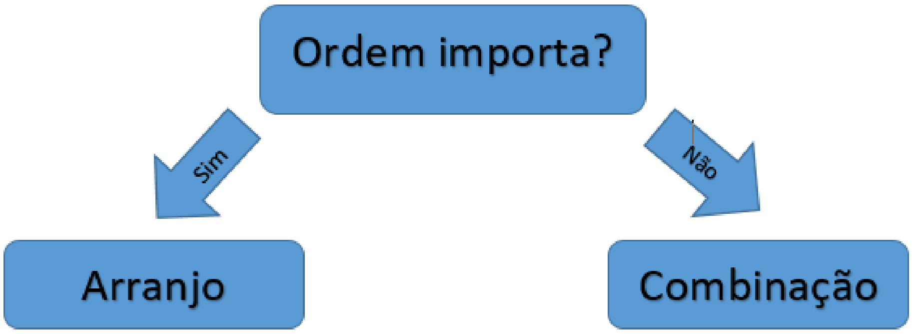
Um número de telefone é formado por 9 algarismos, de 0 a 9. Sendo assim, quantos números de telefone diferentes nós podemos ter?

Entre um grupo com 10 alunos, o professor deve escolher 3 para fazer uma apresentação. Determine de quantos modos diferentes o professor poderá escolher esses alunos.

Com esses dois problemas, espera-se que os alunos possam compreender que no arranjo, problema 1), a ordem importa, pois, está se referindo em maneiras de organizar objetos de maneira sequencial. Já no problema 2), espera-se deixar explícito que na combinação de elementos a ordem não é importante, pois está escolhendo e selecionando itens em um conjunto não ordenado.

Em seguida, mostraremos um fluxograma que pode auxiliar para identificar se é arranjo ou combinação.

Figura 23: Arranjo e combinação simples.



Fonte: Acervo dos autores.

Atividade 3: Arranjo Simples (15 min.)

Apresentaremos aos estudantes o problema motivador enunciado a seguir.

Em uma escola, quinze pais se candidataram para as vagas de presidente e vice-presidente da associação de pais. Eles serão escolhidos através do voto da comunidade. De quantas maneiras distintas essa escolha pode ser feita?

Solução: Existem 15 candidatos à presidência. Escolhido o presidente, o vice poderá ser qualquer um dos outros 14 candidatos restantes. Desta forma, a escolha poderá ser feita de $15 \times 14 = 210$ modos.

Esperamos que os estudantes utilizem o princípio fundamental da contagem, visto na aula anterior, para resolver essa questão. Com isso, indagaremos como podemos generalizar a escolha de p elementos em um conjunto com n possibilidades, para então apresentar o conceito de arranjo.

Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento ordenado de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

O número de arranjos simples de n elementos, tomados p a p, é dado por

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot [n-(p-1)]$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Atividade 4: Arranjo com repetição (15 min.)

Apresentaremos o seguinte problema motivador aos estudantes:

As novas placas do padrão Mercosul passaram a ser obrigatórias em 31 de janeiro de 2020. Mas nem todos os veículos precisam fazer essa troca. A obrigatoriedade só vale nos seguintes casos: primeiro emplacamento; transferência de município; troca de categoria do veículo ou no caso de danificação, furto ou extravio da placa antiga.

A principal diferença em relação às placas antigas é a inversão da quantidade de letras e números. Nas novas, são quatro letras e três números; nas antigas, eram três letras e quatro números. Para evitar erros de leitura, cada país precisa ter uma alternância distinta entre letras e números. No Brasil, o sequenciamento utilizado é LLL NLNN.

Observe as diferenças entre os dois modelos:

Adaptado de: <https://www.terra.com.br/parceiros/guia-do-carro/nova-placa-mercosul-como-fica-a-numeracao-de-seu-carro,55c3b770a5a0c704520566d63205556dzmkhlus1.html>. Acesso em: 18 out. 2020.

Quantas veículos podem ser emplacados utilizando-se o modelo antigo de emplacamento? Quantas placas estarão disponíveis com a adoção do padrão Mercosul?

Solução: Veja que tanto no padrão Mercosul quanto no antigo modelo de placas, não temos nenhuma restrição quanto à repetição de letras ou números. Isto é, uma placa do tipo ABA 1221 é totalmente aceitável. Desse modo, temos 26 opções de letras para cada letra presente na placa, bem como 10 opções numéricas para cada dígito. Desse modo, podem ser formadas $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^3 \times 10^4 = 175\,760\,000$ placas veiculares.

Com o novo modelo de placas, teremos que escolher quatro letras dentre as 26 disponíveis, podendo ocorrer repetição. Semelhantemente, os três números podem ser repetidos e temos 10 opções de escolha em cada caso. Assim, existem $26^4 \times 10^3 = 456\,976\,000$ combinações neste modelo de placa. Podemos observar que além de facilitar o transporte entre países do bloco econômico, esse padrão permite o emplacamento de uma frota muito maior que o modelo anterior.

Este problema será utilizado para apresentar a definição de arranjo com repetição.

O número de arranjos de n elementos, tomados p a p, nos quais pode haver repetição é igual a

$$AR_{n,p} = \overbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}^{\text{p vezes}} = n^p$$

Atividade 5: Combinação Simples (30 min.)

Apresentaremos aos estudantes os seguintes problemas motivadores.

Alice vai para um acampamento com outros sete amigos e pode dar carona para quatro deles em seu carro. De quantas maneiras ela pode escolher os 4 amigos para acompanhá-la?

Solução: Veja que, dentre os sete amigos, ela pode escolher um quarteto de $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ maneiras. Entretanto, estamos contando agrupamentos repetidos, isto é, estamos considerando que o grupo Beto, Carol, Dani e Edu difere do grupo Dani, Edu, Carol e Beto. Assim, precisamos descontar as permutações que podem ocorrer, quem são $4! = 24$. Desse modo, os quatro amigos podem ser escolhidos de $\frac{840}{24} = 35$ modos.

Vejamos que, como a ordem do agrupamento não importa, o número de escolhas foi calculado a partir do quociente entre o número de arranjos e o total de permutações. Com isso, podemos definir o conceito de combinação:

Dado um conjunto de n elementos, chama-se combinação simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento não ordenado de p elementos escolhidos entre os n possíveis.

O número de combinações simples de n elementos tomados p a p é dado por

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Na sequência, resolveremos o seguinte problema com a turma:

(UEPG 2019 – Adaptada) Um grupo é formado por seis mulheres, entre elas, Maria e sete homens, entre eles, Manoel. Quantas comissões podemos formar no total? Quantas comissões podemos formar com duas mulheres e dois homens?

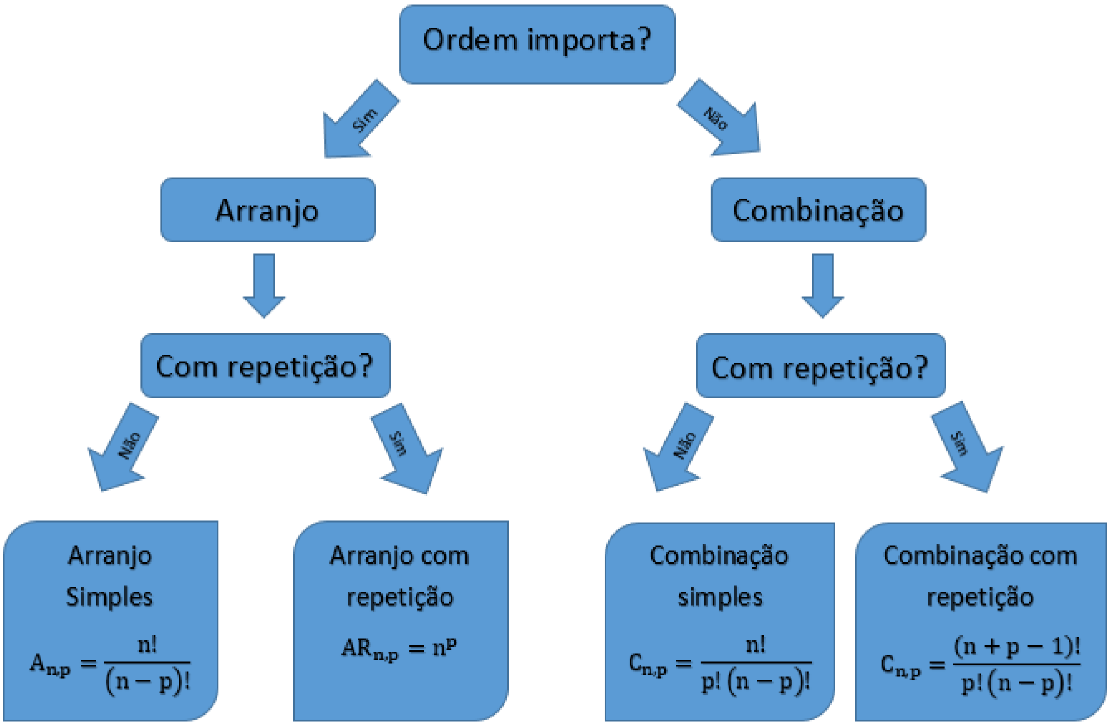
Solução: Notemos que como não existem cargos, a ordem de escolha dos indivíduos não influencia no trabalho da comissão, de modo que podemos resolver este problema utilizando combinação simples. O número total de comissões é dado por $C_{13,4} = \frac{13!}{4!9!} = 715$.

Podemos escolher as duas mulheres de $C_{6,2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$ modos, enquanto os homens podem ser escolhidos de $C_{7,2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$ modos, de maneira que a comissão pode ser constituída de $15 \times 21 = 315$ modos.

Atividade 6: Resolução da lista de exercícios (60 min.)

Para a resolução da lista de exercícios, entregaremos um fluxograma, conforme figura abaixo, para facilitar a resolução dos exercícios.

Figura 24: Arranjo e combinação



Fonte: Acervo dos autores

Avaliação

A avaliação se desenvolverá por meio da observação do desempenho dos estudantes na resolução dos problemas propostos ao longo da aula. Nosso objetivo geral é identificar como que os discentes resolvem questões envolvendo os conceitos de Arranjo e Combinação e como utilizam as fórmulas apresentadas na resolução de problemas de contagem. Ao final do módulo, vamos propor uma avaliação utilizando o *Google Forms*.

Referências:

DIFERENÇA. **Arranjo e combinação**. Disponível em: https://www.diferenca.com/arranjo-e-combinacao/. Acesso em: 26 out. 2020.

LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **Conexões com a Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVAS E GABARITOS. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 02 out. 2020.

PROVAS E SOLUÇÕES. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 02 out. 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar Matemática**. São Paulo: FTD, 2010.

UEL, Universidade Estadual de Londrina. Coordenadoria de Processos Seletivos. Disponível em: https://www.cops.uel.br/v2/. Acesso em: 26 set. 2020.

UEM, Universidade Estadual de Maringá. **Comissão do Vestibular Unificado**. Disponível em: <http://www.vestibular.uem.br/>. Acesso em: 26 set. 2020.

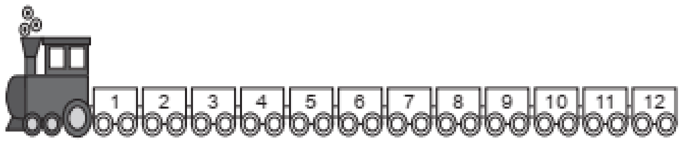
UEPG, Universidade Estadual de Ponta Grossa. **Coordenadoria de Processos de Seleção**. Disponível em: <https://cps.uepg.br/inicio/>. Acesso em 26 set. 2020.

UFPR, Universidade Federal do Paraná. **Núcleo de Concursos**. Disponível em: <http://portal.nc.ufpr.br/PortalNC/Home>. Acesso em 26 set. 2020.

Apêndice

Lista de Exercícios

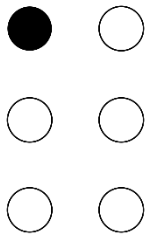
1) (ENEM 2019) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

a) $C^4_{12} \times C^3_{12} \times C^3_{12} \times C^2_{12}$
b) $C^4_{12} + C^3_8 + C^3_5 + C^2 2$
c) $C^4_{12} \times 2 \times C^3_8 \times C^2_5$
d) $C^4_{12} + 2 \times C^3_{12} + C^2_1$
e) $C^4_{12} \times C^3_8 \times C^3_5 \times C^2_2$

2) (ENEM 2012 – Adaptado) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de seis pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por:



Qual é o número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile?

3) (ENEM 2009) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) duas combinações.
e) dois arranjos.

4) (UNIOESTE 2009) Deseja-se montar uma comissão de formatura de um curso superior, sendo esta comissão formada por três pessoas. Os candidatos que se disponibilizaram para compor a comissão foram 3 mulheres e 4 homens. A empresa responsável pela formatura solicitou que houvesse pelo menos uma mulher na comissão. O número de maneiras possíveis para montar esta comissão de formatura é:
   a) 45
   b) 30
   c) 31
   d) 35
   e) 15

5) (UEL 2016 – Adaptado) Em um determinado dia, uma apresentadora de um programa de TV, propôs aos espectadores da plateia que saudassem a todos os demais (uns aos outros) com um abraço. Considere que:
   - todos aceitaram o abraço;
   - os abraços ocorreram apenas entre pessoas da plateia;
   - cada abraço envolveu apenas duas pessoas;
   - duas pessoas se abraçaram apenas uma vez;
   - quando terminaram as saudações, o total de abraços foi de 496.

   Quantas pessoas formavam a plateia do programa naquele dia?

6) (ENEM 2018 – Adaptado) Uma montadora pretende participar de um evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

   Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é:
   a) A_{10}^{4}
   b) C_{10}^{4}
   c) $C_4^2 \cdot C_6^2 \cdot 2 \cdot 2$
   d) $A_4^2 \cdot A_6^2 \cdot 2 \cdot 2$

e) $C_4^2 \cdot C_6^2$

7) (UEPA 2013 – Adaptado) No Concurso da Quina da Caixa econômica Federal, pode-se fazer aposta de 5, 6, 7 e 8 números. Preenchendo o cartão com 8 números, o apostador concorrerá ao prêmio máximo com:
   a) 28 quinas
   b) 35 quinas
   c) 42 quinas
   d) 52 quinas
   e) 56 quinas

8) (ENEM 2016) Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

   Disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012.

   O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por
   a) $10^2 \cdot 26^2$
   b) $10^2 \cdot 52^2$
   c) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$
   d) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2!2!}$
   e) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!2!}$

2.5.2.1. Relatório do dia 24/07/2021

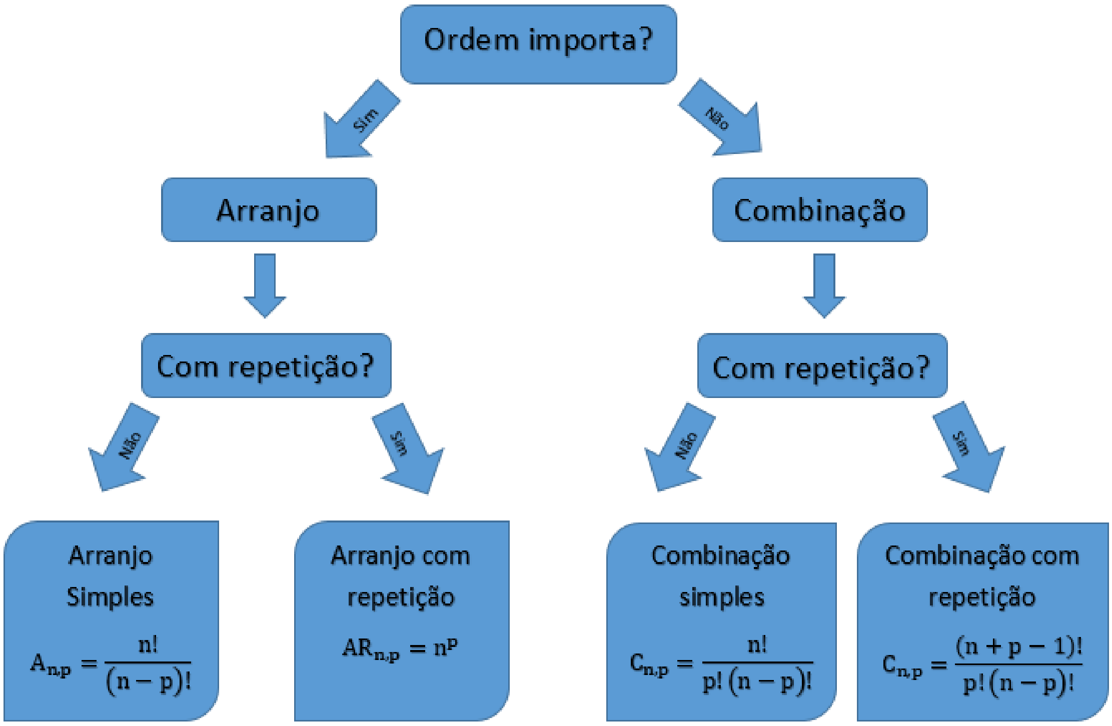
No dia vinte e quatro de julho do corrente ano realizamos o oitavo encontro do PROMAT, curso de matemática ofertado a estudantes da rede pública de ensino, como componente do estágio obrigatório da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II. Em decorrência da pandemia do coronavírus, as atividades propostas foram desenvolvidas remotamente com estudantes inscritos no projeto, utilizando a plataforma do *Google Meet*.

Para dar início à prática, esperamos cinco minutos até que os discentes entrassem na reunião e em seguida cumprimentamos os estudantes, informando que esse seria o penúltimo encontro e estudaríamos arranjo e combinação, dando continuidade ao módulo de análise combinatória e probabilidade. As atividades propostas foram desenvolvidas utilizando-se o *Jamboard.* Neste dia, 8 alunos estavam presentes e a aula teve pouca participação, apenas em momentos pontuais da aula.

Iniciamos a primeira atividade relembrando o princípio fundamental da contagem com um exercício proposto no Exame Nacional de Ensino Médio em 2019, utilizando também um fluxograma para mostrar a diferença entre arranjo e combinação com o auxílio de dois problemas. O primeiro envolvia a utilização de número de celular, momento no qual foi solicitado aos alunos que falassem um possível número com nove dígitos, respondido por uma aluna através do chat. Foi verificado que a ordem importava, uma vez que, alterando a ordem de algum dos algarismos, obtém-se outro número de celular, dessa forma o problema tratava-se de um arranjo. Similarmente, foi abordado uma situação na qual, em um grupo de dez pessoas, três seriam escolhidas, como a ordem não teria importância, seria uma combinação.

Após isso, tratamos da diferença entre o arranjo simples, arranjo com repetição e combinação simples, utilizando atividades motivadoras para definir cada conceito. Novamente os alunos tiveram pouca participação através do chat da reunião. Mencionamos que não trabalharíamos a combinação com repetição devido a sua complexidade e baixa recorrência em vestibulares em geral. Assim, apresentamos um fluxograma para auxiliar os estudantes a identificar o tipo de agrupamento e decidir qual fórmula de resolução utilizar.

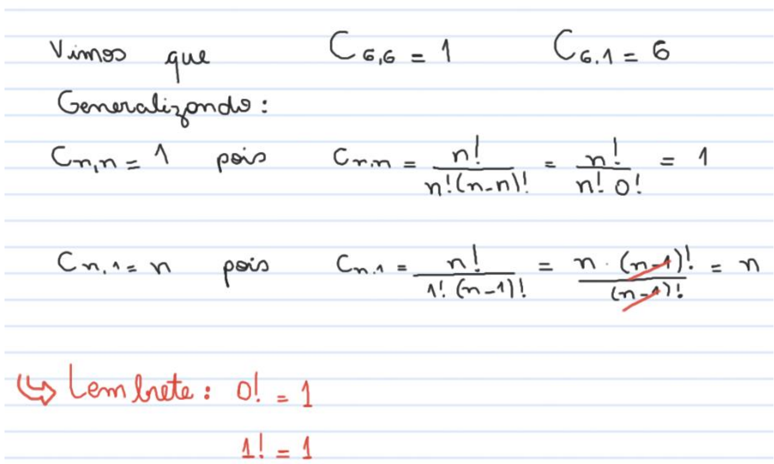
Figura 25: Arranjo e combinação.



Fonte: Acervo dos autores

Em seguida, iniciamos a resolução da lista de exercícios, enviada para eles através do grupo no *WhatsApp*. Nesse momento foi estabelecido o fatorial de 0, de forma que 0! = 1. Além disso, uma das atividades trazia a combinação simples com 6 elementos tomados 6 a 6, momento no qual aproveitamos para demonstrar e formalizar que $C_n^n = 1$ e $C_1^n = n$.

Figura 26: Generalização dos casos Cn,n e Cn,1.



Fonte: Acervo dos autores

Por fim, demos sequência na resolução das atividades e enviamos uma lista de presença, solicitando que colocassem seus nomes para contabilizar frequência. Como gastamos mais tempo que previsto nas atividades anteriores, conseguimos resolver apenas seis exercícios dos oito que foram preparados para aquela aula. Encerramos a aula agradecendo a presença e reforçando o convite para o último encontro, na semana seguinte.

2.5.3. Plano de aula do dia 31/07/2021

PROMAT – 9º Encontro

Público-Alvo:

Estudantes do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE Cascavel, inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2h30min.

Conteúdo:

Probabilidade.

Objetivo Geral:

Espera-se que ao final deste módulo o aluno possa identificar, conceituar, reconhecer e operar com os conceitos básicos de Análise Combinatória e Probabilidade.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com conceitos básicos de probabilidade, objetiva-se que o aluno seja capaz de

- discernir experimento aleatório, espaço amostral e evento;
- calcular a probabilidade de um evento ocorrer;
- calcular a probabilidade da união e da intersecção de dois eventos;
- identificar e diferenciar as situações que devem ser resolvidas pela união ou intersecção de eventos;
- calcular a probabilidade condicional;
- aplicar os conceitos de probabilidade na resolução de problemas.

Recursos Didáticos:

Celular ou computador, lista de exercícios, caderno e lápis ou caneta.

Encaminhamento metodológico:

Os conteúdos e objetivos mencionados anteriormente serão trazidos à tona a partir da atividade dos alunos na resolução das questões propostas nas tarefas motivadoras apresentadas a seguir.

Atividade 1: Experimento aleatório, espaço amostral e evento (30 min.)

Para essa tarefa utilizaremos as questões abaixo para discutir os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral e evento e em seguida, definiremos os mesmos de acordo com Souza (2010).

Quais são os resultados possíveis no lançamento de um dado honesto, com faces numeradas? Quais são os resultados pares possíveis?

Solução: Sendo as faces numeradas de 1 a 6, os resultados possíveis são $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dentre estes, os resultados pares são $\{2, 4, 6\}$.

Lançando dois dados de cores distintas, quantos pares obtemos? Represente-os em uma tabela. Além disso, determine em quantos casos a soma das faces é maior que 8 e em quantos casos o produto das faces é igual a 20.

Solução: Em cada dado, temos 6 resultados possíveis, assim, existem $6 \times 6 = 36$ pares possíveis. Veja:

Tabela 2: Resultados possíveis.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Fonte: Acervo dos autores.

A soma é maior que 8 em 10 casos (ver destaque). Note que considerando números inteiros, o produto 20 pode ser obtido pelos pares (1, 20), (2, 10), (4, 5), (5, 4), (10, 2), (1, 20).

Esperamos que os alunos identifiquem os eventos aleatórios, cujo resultado não é possível prever. Ainda, esperamos que consigam listar corretamente os resultados possíveis solicitados em cada questão, para que possamos definir espaço amostral e evento, como segue.

Definição: Experimento aleatório é todo experimento cujo resultado depende somente do acaso, ou seja, cujo resultado é imprevisível mesmo quando repetido várias vezes, sob as mesmas condições.

Definição: O espaço amostral (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Definição: O evento (A, B, ...) é um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

Todo subconjunto unitário do espaço amostral é chamado de evento elementar. O evento que coincide com o espaço amostral é chamado evento certo e o conjunto vazio é chamado de evento impossível. Quando todos os eventos de um espaço amostral têm a mesma chance de ocorrência, dizemos que este espaço é equiprovável.

Atividade 2: Probabilidade (20 min.)

Considerando a tarefa anterior, vamos propor a seguinte questão:

João e Lucas estão disputando um jogo. Cada um escolhe um número entre 2 e 12. Na sequência, eles lançam dois dados e somam os números em cada face. Se a soma for igual ao número escolhido por um deles, o garoto vence o jogo. Se João escolhe o número 7 e Lucas o número 9, qual deles têm mais chances de vencer?

Solução: Considerando o lançamento de dois dados, os seguintes pares resultam em soma 7: (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4) e (4,3). Analogamente, os pares (3, 6), (6, 3), (4, 5) e (5, 4) resultam em soma 9. Ou seja, dentre os 36 resultados possíveis, 6 resultam em soma 7, enquanto 4 resultam em soma 9. Assim, vemos que João tem mais chances de ganhar.

Com isso, apresentaremos aos estudantes a seguinte definição de probabilidade.

Seja Ω um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio, a probabilidade de ocorrência de um evento A, denotada por P(A), é a razão entre o número de elementos do evento, n(A) e o número de elementos do espaço amostral, $n(\Omega)$:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Em seguida, mencionaremos qual é $n(A)$ e $n(\Omega)$ da questão resolvida de modo que encontremos a probabilidade de somar 7 e de somar 9.

Atividade 3: Probabilidade da intersecção de dois eventos (15 min.)

Iniciaremos a discussão propondo o seguinte questionamento, adaptado de Paiva (2013).

Em urna estão 20 bolas, numeradas de 1 a 20. Sorteando-se ao acaso uma bola, qual a probabilidade de que o número da bola seja múltiplo de 2 e 3?

Solução: Números que são múltiplos de 2 e 3 simultaneamente são múltiplos de 6. Assim, correspondem aos números {6, 12, 18}. Logo, a probabilidade procurada é $\frac{3}{20}$.

Com isso, vamos trazer a seguinte definição: Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω equiprovável, finito e não vazio. Assim,

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

Com isso, podemos definir eventos complementares. Seja A um evento de um espaço amostral Ω. Um evento A^C é denominado complementar de A se $A \cap A^C = \emptyset$.

Atividade 4: Probabilidade da união de dois eventos (15 min.)

Vamos reformular o problema proposto anteriormente: Em urna estão 20 bolas, numeradas de 1 a 20. Sorteando-se ao acaso uma bola, qual a probabilidade de que o número da bola seja múltiplo de 2 ou 3?

Solução: Vejamos que entre 1 e 20 existem 10 números pares que são múltiplos de 2. Ainda, existe 6 números que são múltiplos de 3: {3, 6, 9, 12, 15, 18}. Veja que temos termos em comum nestes conjuntos: os números múltiplos de 6 {6, 12, 18}. Logo, existem $10 + 6 - 3 = 13$ números que são múltiplos de 2 ou 3 e a probabilidade procurada é $\frac{13}{20}$.

Com isso, podemos tratar da probabilidade da união: Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω equiprovável, finito e não vazio. Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Atividade 5: Probabilidade condicional (20 min).

Vamos resolver os seguintes exemplos.

Um jogo consiste em escolher um número entre 1 e 6 e lançar um dado duas vezes. Se o número escolhido aparecer em pelo menos um dos lançamentos, o jogador vencer. Juca escolhe o número 3 e lança o dado. Sabendo que não obteve o número 3 no primeiro lançamento, qual a probabilidade de que ele ganhe o jogo?

Solução: Sabendo que o número 3 não ocorreu no primeiro lançamento, o novo espaço amostral possui $5 \times 6 = 30$ elementos. Destes, 5 deles correspondem a vitória, que são os pares (1, 3), (2, 3), (4, 3), (5, 3) e (6, 3). Portanto, a probabilidade deste jogador vencer é de $\frac{5}{30} \approx 16{,}67\%$.

Qual é a probabilidade de extrair uma carta de um baralho comum de 52 cartas e obter um às, sabendo que ela é uma carta de copas?

Solução: No baralho existem 52 cartas, sendo 13 delas de copas. Dentre elas, existe apenas um às de copas. A probabilidade procurada é $\frac{1}{13}$.

Esperamos que os estudantes percebam que ocorreu a interseção dos eventos A = vencer no segundo lançamento e B = obter número diferente de 3 no primeiro lançamento. Ainda, esperamos que percebam que ocorreu uma alteração no espaço amostral, relacionada à ocorrência do evento B. Com isso, iremos tratar de probabilidade condicional.

Em alguns casos, a ocorrência de um evento A está condicionada à ocorrência de um evento B. Assim, denotamos por $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ a probabilidade condicional de ocorrer A, dado que B ocorreu. Essa probabilidade é dada por

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$$

Ainda, dizemos que dois eventos são independentes quando a ocorrência de um deles não influencia a ocorrência do outro. Isso ocorre se $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$ e $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})$, ou seja,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B})$$

Atividade 6: Resolução da lista de exercícios (50 min.)

O tempo restante será utilizado para resolução da lista de exercícios (ver Apêndice), momento em que pretendemos sanar eventuais dúvidas, estimulando a participação dos estudantes.

Avaliação

A avaliação se desenvolverá por meio da observação do desempenho dos discentes na resolução dos problemas propostos ao longo da aula, especialmente das questões da tarefa Praticando, que funcionará como avaliação deste módulo, tratando também de métodos de contagem. Nosso objetivo geral é verificar se os estudantes são capazes de determinar a probabilidade de ocorrência de um evento, construindo o espaço amostral e utilizando a união ou interseção entre conjuntos.

Referências:

LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **Conexões com a Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PROVAS E GABARITOS. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 02 out. 2020.

PROVAS E SOLUÇÕES. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 02 out. 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar Matemática**. São Paulo: FTD, 2010.

UEL, Universidade Estadual de Londrina. Coordenadoria de Processos Seletivos. Disponível em: https://www.cops.uel.br/v2/. Acesso em: 26 set. 2020.

UEM, Universidade Estadual de Maringá. **Comissão do Vestibular Unificado**. Disponível em: <http://www.vestibular.uem.br/>. Acesso em: 26 set. 2020.

UEPG, Universidade Estadual de Ponta Grossa. **Coordenadoria de Processos de Seleção**. Disponível em: <https://cps.uepg.br/inicio/>. Acesso em 26 set. 2020.

UFPR, Universidade Federal do Paraná. **Núcleo de Concursos**. Disponível em: <http://portal.nc.ufpr.br/PortalNC/Home>. Acesso em 26 set. 2020.

Apêndices

Lista de Exercícios

1) (UFPR – 2020) Uma adaptação do Teorema do Macaco afirma que um macaco digitando aleatoriamente num teclado de computador, mais cedo ou mais tarde, escreverá a obra “Os Sertões” de Euclides da Cunha. Imagine que um macaco digite sequências aleatórias de 3 letras em um teclado que tem apenas as seguintes letras: S, E, R, T, O. Qual é a probabilidade de esse macaco escrever a palavra “SER” na primeira tentativa?

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{15}$

c) $\frac{1}{75}$

d) $\frac{1}{125}$

e) $\frac{1}{225}$

2) (UFPR – 2017) - Um dado comum, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado duas vezes, fornecendo dois números a e c, que podem ser iguais ou diferentes. Qual é a probabilidade de a equação $ax^2 + 4x + c = 0$ ter pelo menos uma raiz real?

a) 5/36
b) 1/6
c) 2/9
d) 4/15
e) 1/3

3) (UFPR – 2013) Durante um surto de gripe, 25% dos funcionários de uma empresa contraíram essa doença. Dentre os que tiveram gripe, 80% apresentaram febre. Constatou-se também que 8% dos demais funcionários apresentaram febre por outros motivos naquele período. Qual a probabilidade de que um funcionário dessa empresa, selecionado ao acaso, tenha apresentado febre durante o surto de gripe?

a) 20%
b) 26%
c) 28%
d) 33%
e) 35%

4) (UNICAMP – 2018) Lançando-de determinada moeda tendenciosa, a probabilidade de sair cara é o dobro da probabilidade de sair coroa. Em dois lançamentos dessa moeda, a probabilidade de sair o mesmo resultado é igual a

a) 1/2
b) 5/9
c) 2/3
d) 3/5

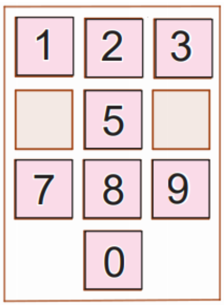
5) (UEPG – 2019) Foram entrevistadas 726 pessoas, perguntando em quais bancos: A, B ou C realizariam investimentos financeiros. Das pessoas entrevistadas, 25 disseram que realizariam investimentos nos três bancos; 240 realizariam investimentos no banco B; 70 realizariam investimentos nos bancos B e C; 60 realizariam investimentos nos bancos A e C; 215 realizariam investimentos no banco A; 55 realizariam investimentos nos bancos A e B e 355 realizariam investimentos no banco C.

Qual é a probabilidade de investimento no banco A ou C? E qual a probabilidade de não investirem em nenhum dos bancos?

6) (UNIOESTE – 2018) Escolhe-se ao acaso um número inteiro entre 101 e 150 inclusive. A probabilidade de o número escolhido ser um quadrado perfeito ou divisível por 4 é:

a) 12/50
b) 13/50
c) 14/50
d) Menor do que 24%
e) Maior do que 28%

7) (UNIOESTE – 2020) O alarme da casa de José é acionado por um teclado numérico composto pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Após digitar várias vezes a mesma senha de três algarismos, a qual é 064, a tinta das teclas que correspondem aos algarismos 4 e 6 apagou-se. Suponha que uma pessoa que não conheça a senha veja que os algarismos dessas teclas estão apagados e deduza que os números 4 e 6 devem compor a senha. Levando esta informação em consideração e que esta pessoa sabe que a senha tem três algarismos, mas não sabe que são, necessariamente, distintos, a chance dessa pessoa acertar a senha CORRETA em uma única tentativa é:



a) 1 em 1000.
b) 1 em 60.

c) 1 em 56.
d) 1 em 54.
e) 1 em 37.

8) (UNICAMP – 2019) O sistema de segurança de um aeroporto consiste de duas inspeções. Na primeira delas, a probabilidade de um passageiro ser inspecionado é de 3/5. Na segunda a probabilidade se reduz para 1/4. A probabilidade de um passageiro ser inspecionado pelo menos uma vez é igual a
a) 17/20
b) 7/10
c) 3/10
d) 3/20

9) (UNICAMP – 2020) Um atleta participa de um torneio composto por três provas. Em cada prova, a probabilidade de ele ganhar é de 2/3, independentemente do resultado das outras provas. Para vencer o torneio, é preciso ganhar pelo menos duas provas. A probabilidade de o atleta vencer o torneio é igual a
a) 2/3
b) 4/9
c) 20/27
d) 16/81

10) (UNICAMP – 2016) Uma moeda balanceada é lançada quatro vezes, obtendo-se cara exatamente três vezes. A probabilidade de que as caras tenham saído consecutivamente é igual a
a) 1/4
b) 3/8
c) 1/2
d) 3/4

11) (UNICAMP – 2017) Um dado não tendencioso de seis faces será lançado duas vezes. A probabilidade de que o maior valor obtido nos lançamentos seja menor do que 3 é igual a
a) 1/3

b) 1/5
c) 1/7
d) 1/9

12) (UEPG – 2016) Sobre probabilidades, assinale o que for correto.

( ) Dois prêmios iguais são sorteados entre cinco pessoas, sendo três homens e duas mulheres. Admitindo que a mesma pessoa não possa ganhar os dois prêmios, a probabilidade de ser premiada pelo menos uma mulher é de 70%.

( ) Numa moeda viciada, a probabilidade de ocorrer cara num lançamento é igual a três vezes a probabilidade de ocorrer coroa. Então a probabilidade de ocorrer cara num lançamento desta moeda é 60%.

( ) Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 são formados números de 3 algarismos distintos. Um deles é escolhido ao acaso. A probabilidade desse número ser par é maior que 50%.

( ) No sorteio de um número natural de 1 a 100, a probabilidade de sair um múltiplo de 10 ou de 15 é menor que 15%.

Praticando – Vestibulares

1) (UNIOESTE – 2017) A tabela a seguir apresenta o número de casos notificados ou prováveis de dengue, Chikungunya e Zika vírus, registrados nos estados do Sul do Brasil até a semana 23 do ano de 2016, conforme o boletim epidemiológico do Ministério da Saúde.

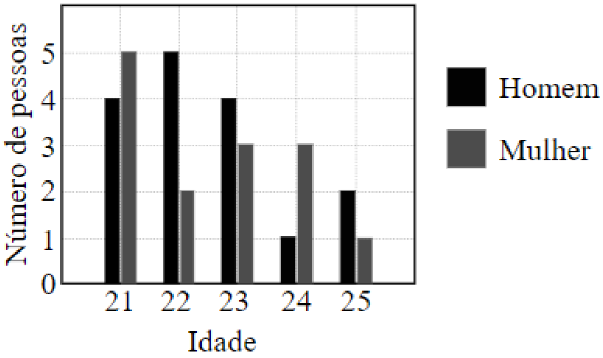
Estado	Dengue	Zika	Chikungunya
Paraná	71114	1935	1459
Santa Catarina	5344	360	324
Rio Grande do Sul	3961	97	233

Escolheu-se aleatóriamente um paciente do Sul do Brasil registrado como um caso (notificado ou provável) de uma dessas doenças. Com relação ao paciente supracitado, de acordo com a tabela acima, assisnale a afirmação que é INCORRETA.

a) A probabilidade de ser um caso de Chikungunya ou de ter sido no Paraná é maior que 90%
b) A probabilidade de que seja um caso do Rio Grande do Sul é menor que a probabilidade de ser um caso de dengue
c) A probabilidade de que não seja do Paraná é menor que 15%

d) A probabilidade de ser um caso de Zika ou de ter sido em Santa Catarina é menor que 10%
e) A probabilidade de ser um caso no Paraná ou ser de dengue é maior que 98%

2) (UNICAMP – 2016) O gráfico de barras abaixo exibe a distribuição da idade de um grupo de pessoas:



a) Mostre que, nesse grupo, a média dos homens é igual à média de idade das mulheres.
b) Escolhendo ao acaso um homem e uma mulher desse grupo, determine a probabilidade de que a soma de suas idades deja igual a 49 anos.

2.5.3.1. Relatório do dia 31/07/2021

No dia trinta e um de julho do corrente ano realizamos o último encontro do PROMAT, curso de matemática ofertado a alunos da rede pública de ensino, que é parte do estágio obrigatório da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II. Por conta da pandemia do coronavírus, as atividades propostas foram desenvolvidas remotamente com estudantes inscritos no projeto, utilizando o *Google Meet*.

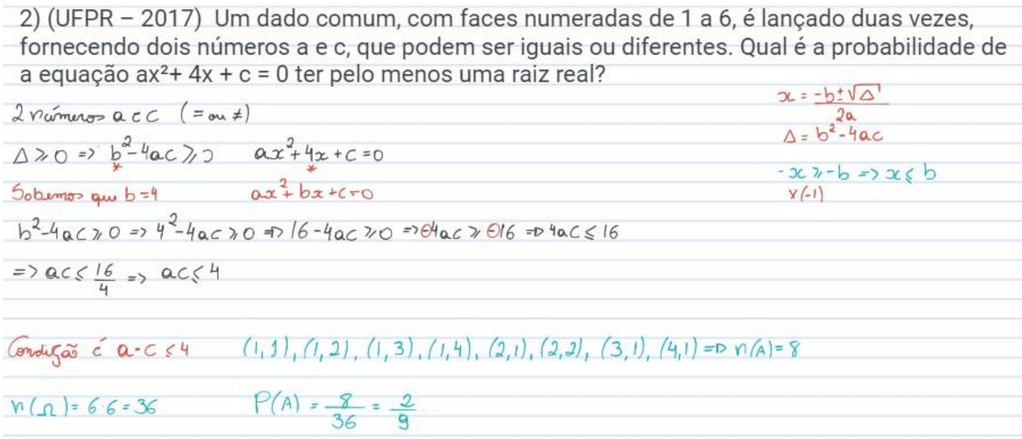
Antes de iniciarmos a aula, aguardamos por cinco minutos para que os discentes ingressassem na reunião. Após cumprimentarmos os 8 alunos presentes, destacamos que este seria o último encontro do projeto e que trataríamos de probabilidade. Utilizando o *Jamboard*, desenvolvemos uma atividade que tratava do lançamento de dados e que nos permitiu definir os conceitos de evento aleatório, espaço amostral e evento.

A partir de um outro problema que também tratava do lançamento de dados, definimos o que é probabilidade, destacando as diferentes maneiras em que pode estar apresentada: na forma fracionária, na forma decimal e na forma percentual, destacando que a probabilidade pode variar de 0 a 1 (ou de 0% até 100%). Para isso, analisamos as possíveis somas obtidas no lançamento de dois dados. Poucos alunos manifestaram-se no chat, auxiliando na construção do espaço amostral e na identificação dos resultados favoráveis – a saber, soma igual a 7 e soma igual a 9.

A seguir, tratamos da probabilidade da interseção e da probabilidade da união de dois eventos com um problema que envolvia o sorteio de bolas numeradas de 1 a 20, buscando números que fossem múltiplos de 2 e 3 (respectivamente, 2 ou 3). Neste momento, pudemos relembrar o conceito de múltiplos e divisores. Apresentamos também a ideia de probabilidade condicional e o conceito de eventos independentes, utilizando como motivação cartas do baralho. Alguns estudantes manifestaram-se, demonstrando conhecer a divisão dos naipes (paus, ouros, copas e espadas).

Após isso, iniciamos a resolução da lista de exercícios disponibilizada através do *WhatsApp*. Destacamos a resolução de dois exercícios: o primeiro deles foi retirado do vestibular da UFPR e tratava da existência de soluções para uma equação de segundo grau, condicionada aos possíveis valores para os coeficientes. Pudemos relembrar a fórmula resolutiva para esse tipo de equação, que os estudantes reconheceram prontamente como “fórmula de Bhaskara”.

Figura 27: Exercício resolvido em aula.


2) (UFPR – 2017) Um dado comum, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado duas vezes, fornecendo dois números a e c, que podem ser iguais ou diferentes. Qual é a probabilidade de a equação $ax^2 + 4x + c = 0$ ter pelo menos uma raiz real?

2 números a e c (= ou ≠)

$\Delta \geq 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0$ $\quad ax^2 + 4x + c = 0$

Sabemos que $b = 4$ $\quad ax^2 + bx + c = 0$

$b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow 4^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow 16 - 4ac \geq 0 \Rightarrow -4ac \geq -16 \Rightarrow 4ac \leq 16$

$\Rightarrow ac \leq \frac{16}{4} \Rightarrow ac \leq 4$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$-x \geq -b \Rightarrow x \leq b$ $\quad \times(-1)$

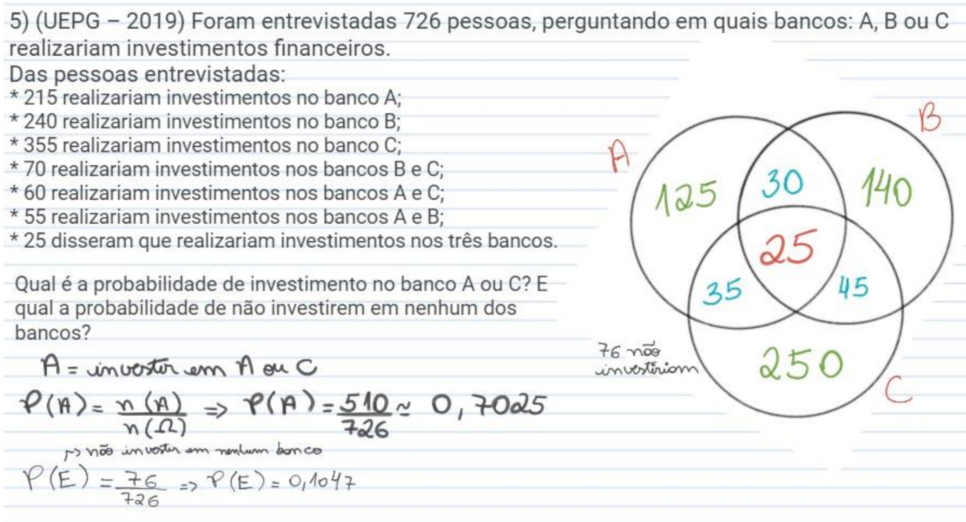
Condição é $a \cdot c \leq 4$ $\quad (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1), (4,1) \Rightarrow n(A) = 8$

$n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$ $\quad P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

Fonte: Acervo dos autores.

Outro exercício que consideramos relevante foi adaptado do vestibular da UEPG e resolvido utilizando o diagrama de Venn, construído juntamente com os estudantes.

Figura 28: Exercício resolvido em aula.


5) (UEPG – 2019) Foram entrevistadas 726 pessoas, perguntando em quais bancos: A, B ou C realizariam investimentos financeiros.
Das pessoas entrevistadas:
* 215 realizariam investimentos no banco A;
* 240 realizariam investimentos no banco B;
* 355 realizariam investimentos no banco C;
* 70 realizariam investimentos nos bancos B e C;
* 60 realizariam investimentos nos bancos A e C;
* 55 realizariam investimentos nos bancos A e B;
* 25 disseram que realizariam investimentos nos três bancos.

Qual é a probabilidade de investimento no banco A ou C? E qual a probabilidade de não investirem em nenhum dos bancos?

A = investir em A ou C

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{510}{726} \approx 0,7025$

não investir em nenhum banco

$P(E) = \frac{76}{726} \Rightarrow P(E) = 0,1047$

Fonte: Acervo dos autores.

Prosseguimos com a resolução da lista e disponibilizamos a lista de presença, solicitando que registrassem seus nomes para contabilizarmos a frequência. Por conta do tempo, resolvemos apenas seis exercícios dentre os doze que foram preparados para esta aula. Encerramos o encontro agradecendo a participação dos estudantes no projeto e desejando sucesso em suas carreiras, lembrando que os certificados de participação seriam emitidos nas semanas subsequentes.

2.6. Considerações Finais

Após concluirmos a execução do PROMAT, notamos que o Estágio Supervisionado II foi indispensável para nossa formação como educadores, sendo uma maneira de vislumbrar algumas alegrias e dificuldades da prática docente. Com a necessidade de um ensino remoto, devido à pandemia do Coronavírus, foi possível experienciar uma prática com alunos de diferentes cidades, além de ser uma novidade que nos possibilitou atualização profissional, que poderá ser utilizada como auxílio para atuações profissionais no futuro.

O Estágio Supervisionado II nos ajudou tanto na prática docente, quanto no amadurecimento como profissionais, visto que foi exigido cumprimento de prazos, explanação das atividades para socialização e aproximação de ferramentas da tecnologia que não estávamos ambientados. Vale ressaltar que a elaboração dos planos de aulas e os relatos nos ajudaram a aprimorar o planejamento das aulas seguintes, proporcionando assim, um melhor desempenho nas atividades realizadas. Assim, estando frente a uma prática nova, a socialização entre colegas também foi importante, trazendo novidades e compartilhando desafios enfrentados e vitórias conquistadas.

Por fim, consideramos que alguns dos "facilitadores" durante o transcurso do trabalho no PROMAT foram o método adotado e as tecnologias utilizadas. Assim, a resolução de exercícios serviu para introduzir, fixar e avaliar a aprendizagem de conceitos, proporcionando aos alunos mais preparação para as provas, especialmente de vestibulares e ENEM. Além disso, o *Jamboard*, o *Geogebra*, além de outros aplicativos e *sites*, se mostraram muito importantes, por contribuírem na dinâmica da aula.